

UNIVERSITE DE GENEVE
Département
de physique théorique

Faculté des sciences
Professeur C. P. Enz

BASES MICROSCOPIQUES
DE LA THEORIE
HYDRODYNAMIQUE
DE L'HELIUM SUPERFLUIDE

T H E S E

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques

par

Michel DROZ

de La Chaux-de-Fonds (NE)

THESE No 1601

GENEVE

Imprimerie de la Section de Physique

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545931_0004

UNIVERSITE DE GENEVE
Département
de physique théorique

Faculté des sciences
Professeur C. P. Enz

BASES MICROSCOPIQUES
DE LA THEORIE
HYDRODYNAMIQUE
DE L'HELIUM SUPERFLUIDE

T H E S E

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques

par

Michel DROZ

de La Chaux-de-Fonds (NE)

THESE No I60I

GENEVE

Imprimerie de la Section de Physique

1973

La Faculté des sciences, sur le préavis du professeur C.P. ENZ, directeur de thèse, du professeur A. THELLUNG (Université de Zurich) et du Dr J. JAECKLE (Université de Constance), autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 24 octobre 1972

Le Doyen:

Jean Muller

Thèse No 1601

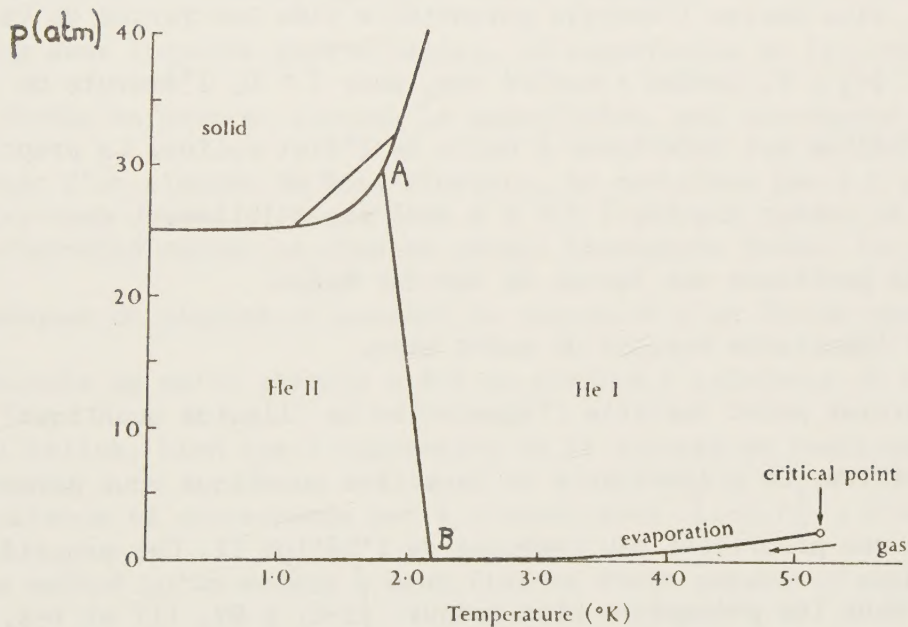


CH A P I T R E I

I n t r o d u c t i o n .

I.I. LES DIVERSES APPROCHES THEORIQUES DE L'HELIUM II.

L'isotope He^4 se distingue de toutes les autres substances de par le fait qu'il reste liquide à la température $T = 0^\circ\text{K}$ pour des pressions inférieures à 25 atmosphères. Son diagramme de phase est le suivant: [1-1, §1]



Il est caractérisé par l'absence d'un point triple liquide-solide-gaz, l'existence de deux autres points triples A et B séparant deux phases liquides de l' He^4 , appelées He I et He II. Lors du passage de l'He I à

l'He II, la chaleur spécifique montre une singularité en forme de λ , ce qui a conduit à appeler "ligne lambda" la ligne de transition AB. Cette transition de phase est du deuxième ordre.

De manière générale, la solidification découle de l'équilibre entre l'énergie potentielle, reliée aux forces de Van der Waals, et l'énergie cinétique des molécules. Classiquement, pour $T = 0$, l'énergie cinétique est nulle, ce qui conduit à un arrangement cristallin associé à un minimum d'énergie potentielle. Quantiquement, l'énergie cinétique ne s'annule pas à $T = 0$, mais elle est égale à l'énergie du point zéro. Habituellement, cette énergie est petite devant l'énergie potentielle. Pourtant pour l'hélium, elle domine l'énergie potentielle liée aux forces de Van der Waals. [1-1. §4] . F. London a montré que, pour $T = 0$, l'énergie de l'état liquide de l'hélium est inférieure à celle de l'état solide. La propriété de l'hélium de rester liquide à $T = 0$ a donc essentiellement deux raisons:

- i) la petitesse des forces de Van der Waals.
- ii) l'importante énergie du point zéro.

Ce dernier point justifie l'appellation de "liquide quantique" donnée souvent à l'hélium. La prédominance du caractère quantique nous permet de s'attendre à des propriétés peu communes de l'hélium II. Ces propriétés se reflètent dans les phénomènes bien connus [1-2, p 87, 117 et 1-3, p 36, 72] tels que:

- i) conductivité thermique géante
- ii) effets thermomécaniques (effet fontaine)
- iii) viscosités anormales (superfluidité)
- iv) films de surface

La première tentative théorique faite pour expliquer ces "super-propriétés" de l'hélium est due à Fröhlich (1937) [1-4]. Il considérait l'hélium comme un alliage binaire formé de N atomes et de N trous. En dessus du point λ , les atomes et les trous seraient distribués au hasard sur $2N$ sites, alors qu'en dessous de la température T_λ les atomes préféreraient un certain sous ensemble de N sites. La transition λ serait donc une transition du type "ordre-désordre". London a montré que l'argument de Fröhlich était insoutenable [1-1, §6] et propose une transition ordre-désordre liée à la condensation de Bose-Einstein [1-1, §6,7,8].

C'est cette idée qui conduisit Tisza à élaborer son modèle à deux fluides de l'hélium liquide [1-5]. Tisza considère l'hélium liquide comme formé de deux liquides impénétrables, le superfluide et le fluide normal, ayant chacun sa propre vitesse. Le superfluide, qui correspond à la phase condensée d'un liquide de Bose-Einstein, ne contribue pas à l'entropie et a une viscosité nulle. Le liquide normal transporte toutes les excitations thermiques du liquide et possède la viscosité d'un fluide normal. Le principal succès de cette théorie a été de prédire l'existence du second son dans l'hélium, bien que l'expression de la vitesse en fonction de la température obtenue ne corresponde pas à l'expérience [1-6,7]. D'autre part, Kapitza a montré qu'un modèle à deux fluides était capable d'expliquer tous les phénomènes observés dans les superfluides [1-8]. Le modèle de Tisza fut attaqué par Landau sur deux points:

- i) l'hélium liquide n'a qu'un rapport très lointain avec un gaz de Bose idéal.
- ii) Il n'y a aucune raison pour que les atomes du condensé ne contribuent pas à la viscosité par leurs collisions avec les atomes excités.

Selon Landau [1-9] une théorie de l'hélium II doit être microscopique et basée sur le fait qu'à $T = 0$ l'hélium reste un liquide dont le caractère quantique devient prédominant. Par analogie avec l'hydrodynamique classique, le problème sera décrit par les opérateurs de densité et de courant de masse:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{R}) &= \int_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \\ \vec{j}(\vec{R}) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha} \{ \vec{p}_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) + \delta(\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \vec{p}_{\alpha} \} \end{aligned} \quad (1-1)$$

où $\vec{r}_{\alpha}$ et $\vec{p}_{\alpha}$ sont les opérateurs de position et d'impulsion d'un atome d'hélium au point $\vec{r}_{\alpha}$.

En définissant l'opérateur vitesse $\vec{v}$ par:

$$\vec{j} = \frac{1}{2} (\rho \vec{v} + \vec{v} \rho) \quad ; \quad \vec{v} = \frac{1}{2} (\rho^{-1} \vec{j} + \vec{j} \rho^{-1}) \quad (1-2)$$

Landau postule les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} [\rho(\vec{R}_1), \rho(\vec{R}_2)]_- &= 0 \\ [\vec{v}(\vec{R}_1), \rho(\vec{R}_2)]_- &= -i\hbar \nabla \delta(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \\ [v^i(\vec{R}_1), v^k(\vec{R}_2)]_- &= -i\hbar \delta(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \rho^{-1}(\vec{R}_1) (\text{rot } \vec{v})_{ik} \end{aligned} \quad (1-3)$$

ces relations sont le point central de la théorie.

En écrivant l'hamiltonien total du système sous la forme:

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} d^3\vec{r} \left\{ \frac{\vec{v} \rho \vec{v}}{2} + \rho \epsilon(\rho) \right\} \quad (1-4)$$

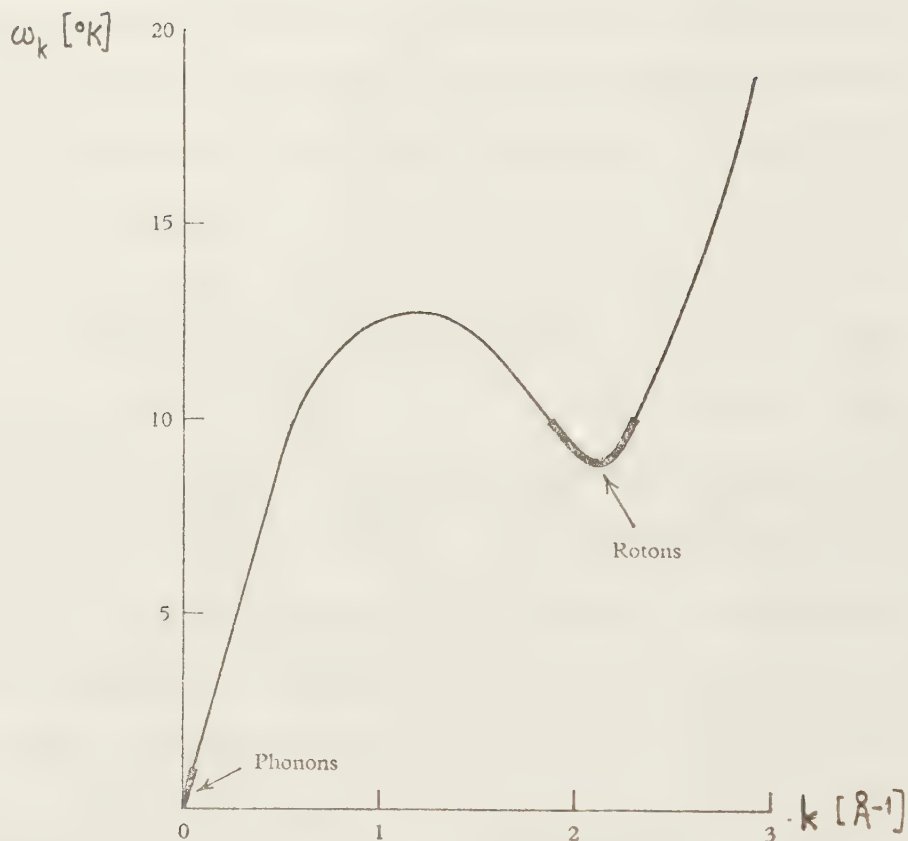
$\epsilon(\rho)$ étant l'énergie interne par unité de masse, on remarque que $[\text{rot } \vec{v}, \mathcal{H}] \neq 0$ sauf si $\text{rot } \vec{v} = 0$ dans tout le liquide. Donc le liquide possède des états stationnaires pour lesquels $\text{rot } \vec{v} \equiv 0$, correspondants à un écoulement potentiel. D'autre part, des règles de commutation (1-3), il découle qu'il n'existe pas d'états pour lesquels $\text{rot } \vec{v}$ est arbitrairement petit (analogie avec les relations de commutation des composantes d'un moment cinétique). Donc, il n'existe pas de transition continue entre les états potentiels ($\text{rot } \vec{v} = 0$) et les états "tourbillonnaires" ($\text{rot } \vec{v} \neq 0$). Si on suppose que les premiers états excités peuvent être décrits en termes d'excitations élémentaires, leur spectre doit être formé de deux branches séparées par un gap Δ . Pour la région potentielle, les mouvements internes dans le liquide étant des ondes sonores longitudinales, nous appellerons les excitations élémentaires associées (quantas sonores) des phonons ($\omega_k = ck$). Les excitations associées aux mouvements "tourbillonnaires" seront appelées "rotons" et auront pour énergie: $\omega_k = \Delta + k^2/2\mu$ μ étant la masse effective des rotons.

L'analyse des résultats des mesures du second son effectuées par Peshkov a conduit plus tard Landau à modifier l'énergie des rotons [1-10] :

$$\omega_k = \Delta + \frac{(k-k_0)^2}{2\mu}$$

avec $\Delta \sim 9.6 \text{ } ^\circ\text{K}$, $k_0 \sim 1.95 \text{ \AA}^{-1}$, $\mu \sim 0,8 m_{\text{He}}$

Le spectre des excitations élémentaires prend alors l'allure bien connue suivante:



Il n'est plus possible de considérer les rotons et les phonons comme étant des excitations élémentaires de caractère différent. L'hélium est à considérer comme un gaz d'excitations élémentaires de même nature. Le nombre des rotons excités N_r étant proportionnel à $T^{3/2} e^{-\Delta/kT}$, il est négligeable devant celui des phonons ($N_{ph} \sim T^3$) pour $T < 0,6^\circ\text{K}$.

Le spectre des excitations permet d'expliquer le phénomène de la superfluidité. En considérant les conditions sous lesquelles il devient énergétiquement favorable, pour le système se mouvant à la vitesse v , de créer une excitation élémentaire, on obtient une vitesse critique $v_c = \left(\frac{\omega_k}{k} \right)$.

au dessous de laquelle le liquide peut s'écouler sans créer d'excitations, c'est-à-dire, sans dissipation d'énergie. La valeur v_c ainsi trouvée est beaucoup plus grande que la valeur expérimentale. Cela provient du fait que la théorie ne tient pas compte de la formation possible de vortex.

Pour $T > 0$, en se basant sur des considérations phénoménologiques, Landau introduit une description à deux fluides de l'hélium liquide. Ces deux fluides, appelés "superfluide" et "fluide normal" n'échangent pas d'impulsion entre eux. Les densités respectives sont ρ_s et ρ_n : $\rho = \rho_s + \rho_n$. A $T = 0$, $\rho_n/\rho = 0$ et à $T = T_\lambda$, $\rho_n/\rho = 1$, le rapport variant continuellement entre ces deux limites. Il faut insister sur le fait que, pour Landau, il n'y a pas de division des particules réelles d'hélium en une partie superfluide et une partie normale (comme chez Tisza), mais il faut plutôt considérer le fluide comme formé d'une masse superfluide et d'une masse normale reliées aux deux mouvements simultanément possibles dans l'hélium. Selon cette théorie, la partie superfluide de l'hélium placé dans un récipient en rotation devrait rester immobile. Cette affirmation est en contradiction avec les expériences de Osborne qui montrent qu'à la fois les composantes normale et superfluide sont en rotation. Cela tient au fait que la possibilité de formation de "vortex" n'entre pas dans cette théorie. L'évaluation de $\rho_n = \rho_n^{ph} + \rho_n^{rot}$ à partir du spectre des excitations, donne un bon accord avec les expériences de viscosité. En partant de l'hypothèse que la composante "s" n'a pas de viscosité et ne transporte pas de chaleur, le modèle à deux fluides donne une explication des divers phénomènes liés à l'hélium liquide.

Finalement, partant du fait que les mouvements dans l'hélium liquide doivent être décrits par deux vitesses $\vec{v}_s$ et $\vec{v}_n$, Landau dérive un système

d'équations hydrodynamiques macroscopiques. En plus des équations de continuité, de conservation de l'impulsion (pour un fluide non visqueux) et de conservation de l'entropie, il faut écrire phénoménologiquement une équation pour la vitesse superfluide. Ce système de quatre équations admet des solutions du type ondes planes. Deux types de propagations possibles apparaissent: le premier et le second son, ayant pour vitesse dans la limite $T \rightarrow 0$, $c_{II} = c_I/\sqrt{3}$, ce qui est en accord avec l'expérience.

Comme nous l'avons vu, les relations de commutation (1-3) jouent un rôle essentiel et ne sont que postulées. Une dérivation de ces relations peut être obtenue dans le cadre de la quantification de l'hydrodynamique d'un fluide non visqueux, établie simultanément par Kroning et Thellung [1-11,12], London [1-1, §17] et J.M. Ziman [1-13]. (voir aussi C.P. Enz [1-14, p 90]).

La première étape consiste à montrer que les équations de l'hydrodynamique classique peuvent être obtenues sous forme canonique à partir d'une densité hamiltonienne de la forme:

$$H(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho \int_{p_0}^p (p - p_0) \frac{dp}{p^2} \quad (1-5)$$

où $\rho(\vec{r}, t)$ est la densité de masse et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ la vitesse locale (qui n'est pas forcément irrotationnelle).

La quantification se fait alors de manière standard en remplaçant les crochets de Poisson par des commutateurs. On obtient ainsi les relations de commutation (1-3) en partant d'une description continue et non plus en

termes de particules. On peut alors effectuer une transformation canonique introduisant de nouveaux champs décrivant les phonons et les rotons.

L'hamiltonien total du système s'écrit:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ph} + \mathcal{H}_{rot} + \mathcal{H}_{int}$$

$\mathcal{H}_{int}$ décrivant l'interaction phonon-roton.

Regardons plus explicitement le cas particulier d'un liquide isotherme irrotationnel: $\vec{v} = -\text{grad } \phi$. En développant dans (1.5) $p(\phi)$ et ρ en série de Taylor au voisinage de la densité d'équilibre ρ_0 , on peut écrire [1-14] :

$$H(\vec{r}, t) = H_0(\vec{r}, t) + H_v^{(3)}(\vec{r}, t) + \sum_{n \geq 3} H^{(n)}(\vec{r}, t) \quad (1-6)$$

où H_0 est le terme harmonique

$H_v^{(3)}$ est le terme anharmonique d'ordre 3 dû à la vitesse

$H^{(n)}$ est le terme anharmonique ordinaire d'ordre n

Ces divers termes s'expriment en fonction de ρ , ρ_0 , $\text{grad } \phi$, $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^{1/2}$ qui est la vitesse du premier son, et des dérivées de divers ordres de c relativement à ρ , tel par exemple la constante de Grüneisen $u = \frac{\rho}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_T$

En effectuant la transformation canonique: (Ω = volume du système)

$$\rho = \rho_0 + \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \sqrt{\frac{k\rho_0}{\Omega c}} Q_{\vec{k}}$$

(1-7)

$$\phi = - \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \sqrt{\frac{c}{k\rho_0 \Omega}} P_{-\vec{k}}$$

avec $[P_{\vec{k}}, Q_{\vec{k}'}]_- = -i \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$

et en introduisant les nouveaux opérateurs $a_{\vec{k}}$ et $a_{\vec{k}}^+$:

$$Q_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ \right\} \quad (1-8)$$

$$P_{-\vec{k}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ a_{\vec{k}} - a_{-\vec{k}}^+ \right\}$$

avec $[a_{\vec{k}}; a_{\vec{k}'}^+]_- = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

l'hamiltonien du système s'écrit:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}^{(3)} + \text{termes anharmoniques d'ordre supérieur}$$

avec: $\mathcal{H}_0 = \sum_{\vec{k}} c k (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \quad (1-9)$

$$\mathcal{H}^{(3)} = \frac{1}{3!} \left(\frac{c}{8\rho_0} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \left\{ 2u-1 + \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2 + \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_3 + \hat{k}_2 \cdot \hat{k}_3 \right\} \left\{ k_1 k_2 k_3 \right\}^{1/2} \quad (1-10)$$

$$\cdot \left\{ \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3, 0} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} + 3 \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3}^+ + h.c \right\}$$

De par la forme de $\mathcal{H}_0$, les opérateurs $a_{\vec{k}}^+$ et $a_{\vec{k}}$ sont interprétés comme créateur et annihilateur de phonons dans l'état $\vec{k}$. Pourtant, le fait que l'on écrive $\omega_{\vec{k}} = ck$ pour les phonons, bien que plausible n'est pas trivial. Si cette relation est exacte pour les photons en électrodynamique elle n'est pas évidente en hydrodynamique. Les équations régissant l'hydrodynamique étant fortement non linéaires, les ondes planes n'en sont pas des solutions exactes. Néanmoins, dans l'approximation où on linéarise les équations, l'énergie moyenne d'une onde plane monochromatique est bien proportionnelle au courant d'impulsion moyen de cette onde, la constante de proportionnalité étant la vitesse du son. [1-1, § 17]

En résumé, nous voyons que la théorie de Landau peut être déduite de l'hydrodynamique quantifiée d'un liquide non visqueux. Le modèle défini par l'hamiltonien (1-9) sera appelé dans ce qui suit le modèle hydrodynamique de Landau.

Un point important dans la théorie de Landau est l'hypothèse qu'il n'existe aucun autre état excité de basse énergie que les états phononiques. Cette hypothèse a été démontrée par Feynman à partir de premiers principes [1-15,16,17]. Il regarde les informations que l'on peut obtenir sur l'hélium à partir de l'équation de Schrödinger écrite pour une famille de N atomes d'hélium en interactions. A toute configuration $(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N)$ des N atomes correspond une fonction d'onde $\Psi(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N)$ dont l'amplitude est une mesure de la probabilité que cette configuration soit réalisée. Compte tenu de la forme de l'interaction entre les atomes d'hélium, l'état fondamental Φ du système à $T = 0$, est celui d'une configuration où tous les atomes sont bien séparés l'un de l'autre avec une densité moyenne quasi constante. Les états excités phononiques s'écrivent:

$$\Psi_{ph} = \left(\sum_j \exp(i\vec{k}\vec{R}_j) \right) \Phi \quad (1-11)$$

et ont pour énergie $\hbar c k$.

Le problème est alors de construire une fonction Ψ représentant un état excité d'énergie aussi petite que possible et qui ne soit pas de type phononique. Ψ doit satisfaire aux conditions suivantes:

- i) Etre orthogonale à Φ et Ψ_{ph}
- ii) Ψ doit varier lentement dans l'espace pour que son gradient soit petit afin de donner une petite énergie cinétique.

iii) Ψ doit correspondre à une densité presque uniforme pour avoir une amplitude appréciable.

En considérant les diverses configurations possibles, on constate qu'il est impossible de satisfaire simultanément ces trois conditions. Le point central est l'indiscernabilité des atomes qui veut que deux configurations obtenues l'une de l'autre par permutation de certains atomes sont identiques. Le fait que les atomes d'hélium soient des bosons joue donc ici un rôle essentiel.

En poursuivant l'analyse de la forme de Ψ , assimilé à Ψ_{roton} et en demandant que cette fonction minimise l'énergie, Feynman obtient un Ψ_{roton} de la forme (1-11) et une énergie correspondante:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(k)} \quad (1-12)$$

où $S(k)$ est le facteur de structure.

Nous voyons que (1-12) donne un résultat significatif non seulement dans la région des rotons, mais encore pour grandes longueurs d'ondes où

$S(k) = \hbar k / 2mc$, ce qui donne $E(k) = \hbar ck$. Le spectre $E(k)$ correspond qualitativement à celui de Landau. Pourtant, il y a deux points faibles

- i) Le gap donné par $E(k)$ est deux fois trop grand.

- ii) La fonction d'onde Ψ_{roton} ne satisfait pas l'équation de continuité.

Ces difficultés ont été résolues par Feynman et Cohen [1-18] qui proposent une nouvelle fonction d'essai qui, simultanément, minimise l'énergie et satisfait l'équation de continuité:

$$\Psi = \prod_{\alpha} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}) \exp i \left(\sum_{\beta} g(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \right) \quad (1-13)$$

avec $g(\vec{r}) \sim A \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{r^3}$ pour grands r . (1-14)

$g(\vec{r})$ décrit le phénomène de "back-flow" nécessaire pour que l'équation de continuité de courant puisse être satisfaite. D'autre part, dans le but d'expliquer la trop grande valeur de la vitesse critique découlant du spectre des excitations seul, Feynman en conclut que le superfluide doit être le siège d'écoulements irrotationnels locaux. C'est l'origine de la théorie des lignes de vortex dont l'existence a été confirmée expérimentalement par Hall et Vinen [1-19]. La vitesse du superfluide est irrotationnelle en tout point, sauf sur les lignes de vortex où elle est infinie. La circulation de cette vitesse autour de chaque ligne est quantifiée. D'autre part, la densité du fluide s'annule sur l'axe du vortex ce qui permet de représenter, de manière imagée, les lignes de vortex par des "trous" dans le liquide. Les vortex peuvent se former à la sortie de capillaires ou simplement au contact du liquide avec les parois du récipient pour peu que le liquide ait une vitesse (donc une énergie cinétique) suffisante pour créer ces vortex. Cela définit une nouvelle vitesse critique dont la valeur correspond bien à celle mesurée expérimentalement.

La connection entre la théorie microscopique de la superfluidité et la condensation de Bose-Einstein a été établie par Bogolioubov [1-20]. Il considère le cas d'un gaz de Bose-Einstein presque parfait avec dégénérescence du condensé. C'est-à-dire, une fraction macroscopique N_0 des atomes se trouve dans le condensé. On peut alors approximer les opérateurs de création $a_0^\dagger$ et d'annihilation a_0 correspondant au condensé par des nombres complexes c . Dans cette approximation, l'hamiltonien du système peut être diagonalisé en effectuant une transformation canonique (dite transformation de Bogolioubov). Le système est alors décrit par un ensemble

de "quasi-particules" d'énergie:

$$E^B(k) = \sqrt{\frac{4\pi N_0 f_0}{m^2} k^2 + \frac{k^4}{4m^2}} \quad (1-15)$$

où f_0 est l'amplitude de diffusion.

Le spectre $E(k)$ correspond qualitativement au spectre de Landau. L'intérêt du travail de Bogolioubov est de montrer, qu'à $T = 0$, le condensé ne représente qu'une partie du superfluide.

Pourtant, l'hélium liquide ne peut pas être considéré comme un gaz de Bose presque parfait. Pour obtenir des résultats quantitativement significatifs dans ce formalisme, l'approximation de Bogolioubov ne suffit pas. Il faut traiter le problème de façon exacte en renormalisant à tous les ordres de théorie de perturbation. Un tel travail n'est possible que dans la limite $k \rightarrow 0$ et a été accompli indépendamment par Gavoret, Nozières [1-21] et Huang, Klein [1-22].

L'existence d'un condensé permet aussi d'obtenir des équations hydrodynamiques dans le cadre d'une théorie microscopique. Une telle approche a été développée par Bogolioubov [1-23], Hohenberg et Martin [1-24], puis étendue au cas avec viscosité par Galasiewicz [1-25].

L'idée est d'ajouter à l'hamiltonien du système de N bosons en interactions, un hamiltonien $\delta H(\eta, u)$ qui couple les opérateurs de champs $\psi^*(\vec{r}, t)$ et $\psi(\vec{r}, t)$ à des sources extérieures $\delta \eta(\vec{r}, t)$ et la densité $\rho(\vec{r}, t)$ à la source extérieure $\delta u(\vec{r}, t)$. Cet hamiltonien additionnel a pour but de briser la symétrie, ce qui a pour conséquence que la quasi moyenne $\langle \psi(\vec{r}, t) \rangle = \phi(\vec{r}, t)$ est non nulle. On définit alors des quantités locales telles:

- la densité de particules $\rho(\vec{r}, t) = \langle \psi^+(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \rangle$
- le courant de particules $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i}{2} \langle \nabla \psi^+(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) - \psi^+(\vec{r}, t) \nabla \psi(\vec{r}, t) \rangle$
- la densité d'énergie $\rho(\vec{r}, t) \epsilon(\vec{r}, t)$
- la fonction d'onde du condensé $\langle \psi(r, t) \rangle = \Phi(r, t) = a e^{i\chi}$ (1-16)

Les deux mouvements existant dans le superfluide sont décrits par:

i) la vitesse superfluide $\vec{v}_s = \frac{1}{m} \nabla \chi$ (1-17)

ii) la vitesse normale : $\vec{j} = m \rho_s \vec{v}_s + m \rho_n \vec{v}_n$ (1-18)

ρ_s étant défini par: $\rho_s = \frac{\rho}{m} \frac{\partial F}{\partial (\psi^2/2)}$ (1-19)

F étant l'énergie libre par particule.

Le courant du condensé est défini par:

$$\vec{j}_c = \frac{i}{2} \langle \phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi \rangle = a^2 \nabla \chi = \rho_c m \vec{v}_s \quad (1-20)$$

En calculant les dérivés $\partial \rho / \partial t$, $\partial \vec{j} / \partial t$, $\partial (\rho \epsilon) / \partial t$, $\partial \Phi / \partial t$ reliées au commutateur de ces diverses grandeurs avec $H[\eta, u] = H + \delta H[\eta, u]$

et en se plaçant au voisinage de l'équilibre, on obtient un système de trois équations hydrodynamiques exprimant la conservation du nombre de particules, de l'impulsion et de l'entropie et une équation pour $\vec{v}_s$.

Ces équations ne sont valables que si on peut définir un équilibre local conséquence de collisions fréquentes entre les particules. Dans un tel

régime, les descriptions du système en termes d'équations hydrodynamiques

linéarisées ou en termes de fonctions de Green $G(k, \omega)$ doivent être

équivalentes. L'équivalence de ces deux descriptions sera réalisée si $k \ll l^{-1}$

(l = libre parcourt moyen) et $\omega \ll \tau^{-1}$ (τ = temps de relaxation), c'est-à-

dire pour petits k et ω . Le passage d'un formalisme à l'autre se fait à

l'aide de la théorie de la réponse linéaire [1-26] qui permet de relier

la moyenne thermique d'un opérateur à une fonction de Green retardée à

temps réels. Il en découle que la fonction de Green retardée particule-

particule possède deux pôles correspondant à la propagation des premier et second sons, alors que la fonction de Green retardée densité-particule, décrivant les oscillations de densité du système n'a qu'un seul pôle correspondant à la propagation du premier son. [1-25, ch. 7].

On voit ainsi microscopiquement que les excitations de basse énergie sont de type phononique.

On peut aussi montrer que les lignes de vortex correspondent à la condition $\Phi(\vec{r}, t) = 0$. [1-27].

Les récentes mesures de Woods et Cowley du spectre des excitations de l'hélium [1-28], ont mises en évidence les caractéristiques suivantes:

i) En plus de la branche "phonon-roton" il apparaît une seconde branche assez diffuse, dont l'énergie est approximativement le double de la première branche et qui oscille légèrement pour $k > 3\text{\AA}^{-1}$ autour du spectre des particules libres.

ii) La disparition de la première branche pour $k \sim 3,5\text{\AA}^{-1}$ et une énergie $\sim 2\Delta_0$. (fin du plateau)

Ces divers comportements sont expliqués, qualitativement tout au moins, par C.P. Enz dans le cadre d'une théorie microscopique [1-29]. L'idée est de calculer l'équation de mouvement de la fonction de corrélation densité-densité en tenant compte des corrélations à trois corps. Les grandeurs intéressantes sont exprimées en termes d'une énergie potentielle effective et d'une énergie cinétique effective. La fonction de corrélation densité-densité possède des pôles correspondant au spectre phonon-roton. De plus, le traitement des corrélations à trois particules donne lieu à

une nouvelle équation aux valeurs propres, exprimée en termes de la fonction spectrale à une particule. Les valeurs propres correspondantes sont identifiables avec la seconde branche du spectre. La disparition de la première branche pour $k \sim 3,5 \text{ \AA}^{-1}$ apparaît comme une singularité de l'énergie potentielle effective.

1.2. CONDENSE ET SUPERFLUIDITE.

Nous remarquons que dans le modèle de Tisza, la théorie microscopique de Bogolioubov et les équations hydrodynamiques à la Hohenberg-Martin, la présence du condensé joue un rôle essentiel. Par contre, dans les théories de Landau et Feynman le condensé n'intervient pas. Seul le fait que l'on ait des bosons joue un rôle chez Feynman alors que la théorie de Landau est indépendante de toutes considérations d'ordre statistique. Cette constatation nous amène à nous poser trois questions:

- A) L'hélium liquide possède-t-il réellement un condensé et peut-on le mesurer expérimentalement?
- B) Tous les systèmes "superfluides" possèdent-ils un condensé?
- C) Quel est le rôle précis du condensé dans la superfluidité?

A) La première étape consiste à généraliser la notion de condensation de Bose-Einstein pour des particules en interaction. Cela a été fait par Penrose et Onsager en termes d'opérateurs statistiques réduits [1-30]. Pour un système présentant de la condensation de Bose-Einstein, la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ prend la forme:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \psi^+(\vec{r}') \psi(\vec{r}) \rangle = \langle \psi^+(\vec{r}') \rangle \langle \psi(\vec{r}) \rangle + \tilde{\rho}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1-21)$$

où $\tilde{\rho}(\vec{r}, \vec{r}') \rightarrow 0$ si $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$

$\phi(\vec{r}) = \langle \psi(\vec{r}) \rangle$ est la fonction d'onde du condensé.

Un tel système présente donc un ordre à longue portée (ODLRO). Si on néglige les fluctuations, nous avons, pour une condensation dans l'état fondamental: $\phi(\vec{r}) = n_0^{1/2} = \text{cte.}$

où n_0 est le nombre de particules dans l'état fondamental.

Penrose et Onsager montrent qu'il y a condensation pour l'hélium II. Ils estiment, en utilisant la fonction d'onde de l'état fondamental de Feynman, que $n_0/N \sim 0,08$.

L'existence d'un condensé étant admise, peut-on l'observer expérimentalement? La première suggestion dans ce sens est due à Hohenberg et Platzman [1-31]. L'idée est de faire diffuser des neutrons sur un bain d'hélium liquide. Soit $\vec{k}$ le transfert d'impulsion du neutron et $\lambda_k = \hbar/k$. Si λ_k est grand devant la distance interatomique moyenne, la diffusion nous renseignera sur les excitations collectives du système (phonons, rotons). Par contre si $\lambda_k \ll$ distance interatomique, la diffusion nous renseignera sur les atomes individuels dans l'hélium. En supposant de plus que la collision a lieu pendant un temps court devant le temps de collision entre les atomes d'hélium, la diffusion aura lieu sur des atomes d'hélium libres. Le neutron, diffusant sur un atome en mouvement d'impulsion $\vec{p}$, subira un déplacement d'énergie par effet Doppler. Sous ces conditions, et pour un grand transfert d'impulsion $\vec{k}$, la section efficace différentielle s'écrit:

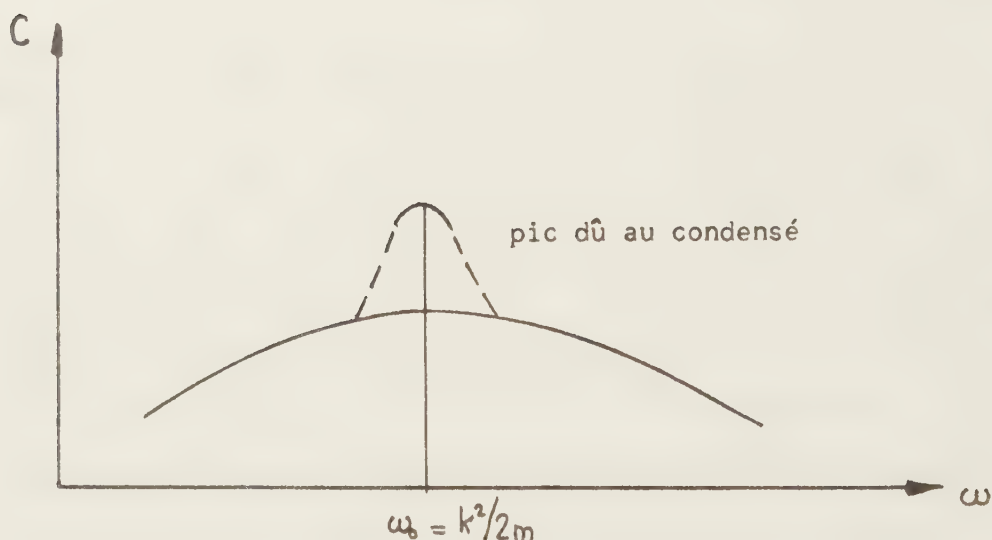
$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} \sim \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left\{ \omega - \frac{k^2}{2m_{He}} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}}{m_{He}} \right\} n_p \quad (1-22)$$

où ω = transfert d'énergie lors de la diffusion.

n_p = distribution d'équilibre des atomes d'hélium.

Cette relation n'est exacte que pour un gaz idéal sans interactions. En effet, on ne tient pas compte des interactions dans l'état final de l'atome diffusé avec les autres atomes du bain. Hohenberg et Platzman estiment grossièrement l'effet des interactions des états finaux dans la limite $k \rightarrow \infty$, en supposant que ces interactions vont se traduire par un temps

de vie fini. Il s'en suit que le taux de comptage C des neutrons diffusés en fonction du transfert d'énergie ω devrait avoir l'allure suivante:



Woods et Cowley [1-28] ont essayé de voir expérimentalement ce pic pour un transfert d'impulsion $2\text{\AA}^{-1} < k < 9\text{\AA}^{-1}$. Ils ne l'ont pas observé. Cela a conduit Sears à étudier beaucoup plus soigneusement le problème en prenant les interactions entre états finaux pleinement en considération. [1-32,33]. La contribution de l'interaction des états finaux qu'il obtient est beaucoup plus importante que supposée par Hohenberg et Platzman, ce qui explique les résultats expérimentaux de Woods et Cowley. En travaillant avec un transfert d'impulsion allant jusqu'à $\sim 20\text{\AA}^{-1}$, O.K. Harling [1-34] a estimé par cette méthode la fraction du condensé à $8,8 \pm 1,3 \%$ pour $T = 1,27^\circ \text{K}$.

Une autre méthode pour la détermination expérimentale du condensé est proposée par Cummings, Hyland et Rowlands [1-35]. La méthode repose sur la mesure du facteur de structure $S(k)$ aux rayons X. L'intensité de la

figure de diffraction dépend du nombre des atomes hors du condensé. Si on considère la fonction radiale $g(\vec{r})$, (reliée à la transformée de Fourier de $S(k)$) l'amplitude des pics de cette fonction variera avec la température. Pour $T > T_\lambda$, un abaissement de température diminuera l'agitation thermique et augmentera l'intensité des pics. Pour $T < T_\lambda$, l'amplitude diminuera si la température diminue, car il y a augmentation de la fraction du condensé. Quantitativement, tout repose sur le résultat de Fröhlich, qui relie dans la limite $r = |\vec{x} - \vec{y}| > r_0 = 4,5\text{\AA}$, la fonction de corrélation de paire $P(\vec{r}, T)$ à la matrice statistique réduite d'ordre deux:

$$P(\vec{r}, T) = \Omega_2(\vec{x}, \vec{y}; \vec{x}, \vec{y}, T) = N^2 - \{N - n_0(T)\}^2 + \lambda_2(\vec{r}, T) \quad (1-23)$$

où $\lambda_2(\vec{r}, T) \rightarrow [N - n_0(T)]^2$ pour $r \gg r_0$

La fonction de distribution radiale $g(\vec{r}, T)$ est définie par:

$$P(\vec{r}, T) = N^2 g(\vec{r}, T) \quad (1-24)$$

On définit une fonction $g_N(\vec{r}, T)$ par:

$$\lambda_2(\vec{r}, T) = \{N - n_0(T)\}^2 g_N(\vec{r}, T) \quad (1-25)$$

on peut alors écrire:

$$g(\vec{r}, T) - 1 = \left\{ \frac{N - n_0(T)}{N} \right\}^2 (g_N(\vec{r}, T) - 1) \quad (1-26)$$

$g(\vec{r}, T)$ est mesurable expérimentalement. Il suffit de connaître $g_N(\vec{r}, T)$ pour obtenir $n_0(T)/N$. Mais pour $T > T_\lambda$, $g_N(\vec{r}, T) = g(\vec{r}, T)$. La valeur de $g_N(\vec{r}, T)$ pour $T < T_\lambda$, est obtenue par extrapolation de $g_N(\vec{r}, T)$ pour $T > T_\lambda$.

Les auteurs obtiennent des mesures expérimentales, l'estimation:

$0,1 < n_0(T=1,4^\circ\text{K})/N < 0,2$. L'ordre de grandeur correspond bien au calcul de Penrose et Onsager.

B) Il est difficile d'apporter une réponse satisfaisante à la question de savoir si tous les systèmes superfluides possèdent un condensé. Pratiquement, tous les systèmes superfluides connus présentent des effets quantiques macroscopiques reliés à l'existence d'un condensé. Théoriquement le problème est de savoir sous quelles conditions un système présente un ordre à longue portée (ODLRO). Hohenberg a montré qu'il ne pouvait pas exister d'ODLRO dans un système à une et deux dimensions à température finie. La démonstration a été étendue par Josephson à un système à trois dimensions où une dimension est petite mais finie [1-36]. Des expériences faites sur des films minces montreront si de tels systèmes sont réellement "superfluides" et le siège de phénomènes quantiques macroscopiques, ce qui permettra peut-être de donner une réponse plus satisfaisante à la question posée.

C) Venons-en au problème du rôle joué par le condensé dans la superfluidité.

Une relation entre la densité du condensé ρ_c et la densité superfluide ρ_s a été obtenue pour la première fois par Galasiewicz [1-37] dans le cadre d'une dérivation microscopique d'équations hydrodynamiques pour un superfluide. Il a obtenu:

$$\rho_c / \rho_s = \frac{2\pi k^2}{m} G^{\text{ret}}(\vec{k}, \omega=0)$$

où G^{ret} est la fonction de Green retardée particule-particule.

Récemment, Haug et Weiss [1-38,39,40] ont développé une théorie montrant explicitement comment la condensation de Bose conduit à une théorie phénoménologique de la superfluidité. En partant du concept

d'ODLRO pour l'opérateur statistique réduit d'ordre 1 d'un système de bosons en interactions, un ensemble complet d'équations hydrodynamiques pour le condensé et le non condensé est obtenu. Cet ensemble d'équations est utilisé pour construire des lois de conservation pour les densités de particule, d'impulsion et d'énergie. Une comparaison systématique avec les équations hydrodynamiques de Landau permet d'établir certaines correspondances telles:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_c \quad (\text{vitesse du condensé})$$

$$\rho_c = \frac{\rho_s}{1 + \alpha \rho_n / \rho} \quad (1-27)$$

où ρ_c est la densité du condensé et α une constante positive mesurant l'interaction. Donc on a toujours $\rho_s \geq \rho_c$, l'égalité ayant lieu pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour un gaz de Bose idéal. La validité de cette théorie est limitée par les conditions:

- i) T proche de T_λ
- ii) gaz de Bose dilué

ce qui met fortement en cause l'application de ces résultats pour l'hélium à des températures voisines de zéro.

Pour mieux comprendre le rôle du condensé, dans l'hélium, comparons superfluide et fluide parfait, non visqueux, à $T=0$. [1-41]. Dans un fluide parfait, il suffit d'introduire une impureté dans le système ou des effets de bord pour que la superfluidité disparaisse. Donc, le superfluide est beaucoup plus qu'un simple fluide parfait; la propriété d'ordre à longue portée le caractérise.

Revenons à la théorie de Feynman. Le procédé utilisé pour construire les diverses fonctions d'onde est aussi valable pour un fluide normal. Mais nous avons vu que le fait que les atomes d'hélium soient des bosons impliquait qu'il n'existe pas d'états excités à basse énergie autres que les états phononiques. Cette conclusion n'est plus vraie pour un fluide normal pour lequel, les états d'excitation phononiques ne sont qu'un sous-ensemble de tous les états possibles du système. Nous voyons donc que dans la théorie de Feynman le condensé est présent d'une manière sous-jacente. Le fait que les atomes d'hélium aient un caractère bosonique (donc possèdent une condensation de Bose) assure que les seuls états stables et non dissipatifs (pour des vitesses inférieures à la vitesse critique) sont ceux du spectre phonons rotons. Donc, d'une part la présence d'un condensé est nécessaire pour éliminer tous les états autres que ceux du type phonon roton et d'autre part, les paramètres caractérisant le condensé n'entrent pas explicitement dans la caractérisation du spectre.

En résumé, le rôle du condensé dans la superfluidité peut être exprimé paradoxalement de la manière suivante:

Le condensé ne joue pas de rôle essentiel pour le spectre des excitations de l'hélium liquide pour peu qu'il existe un condensé.

Illustrons ce point d'une autre manière en considérant le comportement de la vitesse du son dans l'hélium [1-42]. Si on regarde la dépendance en température de la vitesse du son dans l'intervalle $0 < T < 3^\circ\text{K}$, on remarque que celle-ci est, en première approximation, une constante et ne présente qu'une très légère singularité au voisinage du point λ [1-3, p.195]

D'autre part, la vitesse du son à température constante augmente avec la densité du liquide. Dans ces deux cas, l'énergie cinétique du liquide augmentant, la densité du condensé doit décroître. Si on calcule les excitations élémentaires dans le système à partir de la fonction de Green à une particule, en se limitant à une approximation du type Bogolioubov, on obtient pour petits k une vitesse du son $c_s \sim n_0^{1/2}$. Ceci est en complète contradiction avec l'expérience. Donc, pour obtenir des résultats significatifs dans ce formalisme, il faut renormaliser le problème à tous les ordres. C'est ce qu'ont fait Gavoret et Nozières [1-21]. Ils obtiennent alors l'important résultat suivant: A $T = 0$ et dans la limite des petits k , la fonction de Green à une particule possède les mêmes singularités que la fonction de corrélation densité-densité.

Or, la fonction de corrélation densité-densité est directement reliée au spectre phononique et n'a pas de rapport avec le condensé. Donc le spectre de l'hélium à petits k apparaît être déterminé par des processus dynamiques largement indépendants de la présence du condensé.

D'autre part, regardons quelle est l'origine du résultat de Gavoret et Nozières. Le point central réside dans le fait qu'il existe une fonction vertex, couplant les états intermédiaires de la fonction de Green à une particule aux états intermédiaires de la fonction de corrélation densité-densité. Plus précisément, Gavoret et Nozières montrent que les diagrammes intervenant dans les développements perturbatifs des fonctions de Green à une et deux particules peuvent être construits à l'aide des éléments suivants: les propagateurs nus $G_{\alpha\beta}^{(0)}$, les self énergies $\Sigma_{\alpha\beta}$, les tri-vertex $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et les quadrivertex $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$. L'existence des trivertex $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ est liée à celle du condensé.

La présence du condensé permet donc aux fonctions de Green à une et deux particules d'avoir les mêmes états intermédiaires, par conséquence les mêmes singularités. Si le condensé disparaît, le spectre reste donc essentiellement inchangé, mais par contre l'amplitude de la fonction de Green à une particule s'annule car:

$$\lim_{(\vec{k}, \omega) \rightarrow 0} G(k; \omega) = \frac{n_0}{n} \cdot \frac{mc^2}{\omega^2 - c^2 k^2 + i0} \quad (1-28)$$

Le rôle ambivalent du condensé apparaît donc clairement.

I.3. PLAN DU TRAVAIL.

Le modèle hydrodynamique de Landau reste néanmoins celui qui a permis d'expliquer le plus grand nombre de phénomènes observés dans l'hélium liquide. Il possède pourtant deux inconvénients:

- i) Il ne dérive pas totalement d'une théorie microscopique.
- ii) Il ne fait pas intervenir le caractère bosonique des particules , donc n'explique pas, par exemple, pourquoi l' He^3 n'est pas superfluide.

C'est pourquoi, dans le but de représenter à partir d'une description microscopique l'hélium liquide à basse température comme un gaz de phonons en interactions, nous développerons au chapitre II une description en termes de variables collectives. Nous calculerons en particulier le spectre phononique en renormalisant à tous les ordres de théorie de perturbation.

Au chapitre III nous calculerons l'atténuation ultrasonore à basse température également à tous les ordres dans l'interaction. Finalement, au chapitre IV, nous établirons des identités de Ward pour un gaz de phonons en interaction afin de calculer la dépendance en température de la vitesse du son.

C H A P I T R E I I

D e s c r i p t i o n m i c r o s c o p i q u e
d e l ' h é l i u m s u p e r f l u i d e
e n t e r m e s d e v a r i a b l e s
c o l l e c t i v e s .

II.1. DESCRIPTION D'UN SYSTEME A N CORPS EN TERMES DE VARIABLES COLLECTIVES.

APPLICATION A L'HELIUM SUPERFLUIDE.

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement les idées gouvernant la description d'un système à N corps en termes de variables collectives et plus particulièrement les applications qui en ont été faites au cas de l'hélium superfluide. Nous serons alors amenés au modèle de Sunakawa, point de départ de notre justification microscopique du modèle hydrodynamique de Landau.

La notion de variables collectives a été introduite pour la première fois dans le cas d'une assemblée de particules en interactions fortes, pour laquelle une théorie de perturbation traditionnelle ne convenait pas. L'idée centrale est que l'interaction donne lieu à une sorte de mouvement collectif dans l'assemblée de particules, pouvant être décrit en termes de variables collectives. La propriété primordiale de ces variables est que leur équation de mouvement est essentiellement indépendante des détails du comportement, souvent très complexe, des diverses particules.

La première description en termes de variables collectives est due à D.Bohm et D.Pines [2,1- 1,2,3,4,5] pour l'étude des plasmons. Ce cas étant particulièrement intéressant pour illustrer les principes d'une description en termes de variables collectives, nous allons rappeler les principales étapes de leur calcul.

Regardons tout d'abord les choses classiquement. Considérons des particules chargées négativement, dans une boîte de volume unité. La neutralité

est assurée par la présence d'une charge positive uniformément répartie dans la boîte. Soit $\rho(\vec{x})$ la densité de particules:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (2.1-1)$$

et $\rho_{\vec{k}}$ sa transformée de Fourier:

$$\rho_{\vec{k}} = \int d\vec{x} \rho(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} = \sum_i e^{-i\vec{k}\vec{x}_i} \quad (2.1-2)$$

Compte tenu de l'interaction de Coulomb entre particules, l'équation de mouvement de la $i^{\text{ème}}$ particule s'écrira, avec: $V_k \equiv 4\pi e^2/k^2$:

$$\ddot{\vec{x}}_i = -i \sum_j \sum_{\vec{k} \neq 0} \vec{k} V_k \exp[i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)] \quad (2.1-3)$$

Il est évident qu'il n'est pas possible de résoudre le système (2.1-3) pour les N particules. Introduisons alors les variables collectives $\rho_{\vec{k}}$. Pour tester si $\rho_{\vec{k}}$ est une bonne variable collective, écrivons son équation de mouvement:

$$\ddot{\rho}_{\vec{k}} = - \sum_i (\vec{k} \cdot \vec{v}_i)^2 \exp(-i\vec{k}\vec{x}_i) - i \sum_i (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) \exp(-i\vec{k}\vec{x}_i) \quad (2.1-4)$$

en tirant $\vec{v}_i$ de (2.1-3), il vient:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{\vec{k}} = & - \sum_i (\vec{k} \cdot \vec{v}_i)^2 \exp(-i\vec{k}\vec{x}_i) - \frac{Nk^2 V_k}{m} \sum_i \exp(-i\vec{k}\vec{x}_i) - \\ & - \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k}} \sum_{ij} \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}'}{m} V_{\vec{k}'} \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{x}_i] \exp(-i\vec{k}'\vec{x}_j) \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

Si les particules sont distribuées au hasard, alors:

$$\sum_i \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{x}_i] \simeq 0 \quad (\vec{k}' \neq \vec{k})$$

c'est le contenu de l'approximation des phases aléatoires (RPA) qui fait tomber le dernier terme de (2.1-5).

En introduisant la fréquence de plasma: $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m$

(2.1-5) devient:

$$\ddot{p}_k + \omega_p^2 p_k + \sum_i (\vec{k} \cdot \vec{v}_i)^2 \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}_i) = 0 \quad (2.1-6)$$

Pour petits k , le dernier terme est négligeable et on obtient pour de

grandes longueurs d'onde:
$$\ddot{p}_k + \omega_p^2 p_k \approx 0$$

p_k oscille donc à la fréquence de plasma. Son comportement est totalement indépendant du comportement des particules individuelles et p_k est donc

une bonne variable collective. Pour des k qui ne sont pas très petits, le

troisième terme de (2.1-6) n'est plus négligeable. Il tend à s'opposer au

mouvement collectif du système. En effectuant une moyenne sur la vitesse

des particules, on peut estimer la valeur de k à partir de laquelle ce

terme domine $\omega_p^2 p_k$. La valeur de k critique, k_D , appelée vecteur d'onde

de Debye, joue un rôle très important puisqu'elle détermine le nombre S

de degrés de liberté de type collectif. Des $3N$ degrés de liberté du système,

S correspondent à des variables collectives, les $3N-S$ restant, corres-

pondant aux grandes valeurs de k , seront mieux représentés en termes de

particules individuelles.

On peut tenir compte du troisième terme de (2.1-6) également pour $k < k_D$

en définissant une nouvelle variable collective q_k satisfaisant l'équation :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k \approx 0 \quad (2.1-7)$$

Pour $\vec{k} \cdot \vec{v}_i / \omega_k$ petit et pour une distribution isotrope des vitesses, on

obtient:
$$\omega_k^2 \approx \omega_p^2 + k^2 \langle \vec{v}^2 \rangle \quad (2.1-8)$$

La fréquence de plasma est alors corrigée pour tenir compte des fluctuations

thermiques. On vérifie que l'on peut écrire p_k sous la forme $p_k = q_k + \eta_k$

η_k satisfaisant l'équation de mouvement:

$$\ddot{\eta}_k = - \sum_i \eta_{k,i} (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}_i) \quad (2.1-9)$$

$\eta_{\mathbf{r}}$ contient donc des termes reflétant les mouvements individuels des particules. On peut alors montrer que la distribution de charge correspondante est celle d'une famille de particules se mouvant aux vitesses $\vec{v}_i$, habillées d'un nuage de charges positives qui écrantent la charge centrale sur une distance de l'ordre de $\lambda_D = k_D^{-1}$. Ce "nuage" entourant la particule est tout à fait similaire au "back-flow" dans l'hélium liquide. La charge totale est donc répartie en deux parties, la première oscillant collectivement ($q_{\mathbf{r}}$) alors que la seconde ($\eta_{\mathbf{r}}$), suit les particules individuelles et correspond à la charge centrale plus son nuage d'écrantage.

Une analyse similaire peut être faite dans le cadre quantique. L'idée est de soumettre l'hamiltonien à une série de transformations canoniques, de manière à ce qu'il s'exprime comme la somme de deux termes: l'un représentant l'hamiltonien d'une famille d'oscillateurs harmoniques, décrivant les oscillations collectives et l'autre représentant en ensemble de particules individuelles, dont l'interaction est modifiée par des effets du type écrantage ou back-flow. Les principales étapes du calcul sont les suivantes: on part avec l'hamiltonien du système dans les variables particules:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i\mu} (p_{i\mu}^j)^2 + \sum_{\mathbf{r} \neq 0} \sum_{i,j} V_{\mathbf{r}} \exp [i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)] + \frac{N^2 V_0}{2} \quad (2.1-10)$$

et on introduit un ensemble de nouvelles variables complexes $q_{\mathbf{r}}$, ainsi que leurs variables canoniquement conjuguées $p_{\mathbf{r}}$, correspondant aux S degrés de liberté de type collectif. L'étape suivante consiste à remplacer l'hamiltonien (2.1-10) par un nouvel hamiltonien "étendu" H' , pour lequel $p_{\mathbf{r}}$ est une constante du mouvement ($\dot{p}_{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow p_{\mathbf{r}} = \text{cte} \equiv 0$).

Afin que H' décrive bien le système original, il faut astreindre le système aux conditions subsidiaires suivantes:

$$P_{\vec{k}} \Psi = 0 \quad (2.1-11)$$

où Ψ est un état propre de H .

La raison pour laquelle on procède de cette manière est que H' peut être obtenu à partir de H par la transformation canonique:

$$H' = e^{-iS_0} H e^{iS_0} \quad (2.1-12)$$

avec

$$S_0 = i \sum_i \sum_{\vec{k} \neq 0, k < k_D} V_k^{1/2} q_{\vec{k}}' \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}_i')$$

La condition auxiliaire (2.1-11) ne fait qu'exprimer la réduction du nombre de degrés de liberté des particules. En terme de $\Phi = e^{iS_0} \Psi$, les conditions auxiliaires s'expriment par:

$$\Omega_{\vec{k}}' \Phi = \left\{ P_{\vec{k}}' + V_k^{1/2} \sum \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}) \right\} \Phi = 0 \quad (2.1-13)$$

(les grandeurs primées s'obtiennent des non primées par la transformation (2.1-12)).

Dans l'approximation RPA, l'hamiltonien H' s'exprime alors sous la forme:

$$H' = H_c + H_p + H_I + H_{SR} \quad (2.1-14)$$

où: H_c décrit une famille d'oscillateurs de fréquence ω_k :

$$\omega_k^2 \simeq N V_k k^2 / m \quad (k < k_D)$$

H_p est l'hamiltonien des particules libres

H_I décrit l'interaction des particules avec les "variables collectives".

H_{SR} décrit les interactions résiduelles à courte portée ($< \lambda_D$)

Une nouvelle transformation canonique permet d'éliminer H_I . En posant:

$$H'' = e^{-iS_1} H' e^{iS_1} \quad (2.1-15)$$

avec S_1 choisi de manière judicieuse, on arrive à:

$$H'' = H_c + H_{p'} + H_L \quad (2.1-16)$$

H_p décrit maintenant une famille de particules libres avec masse effective m^* et H_L l'interaction résiduelle à longue portée entre paires de particules. L'hamiltonien H'' est à compléter par les conditions auxiliaires:

$$\Omega'_k \psi = 0 \quad (2.1-17)$$

qui limitent le nombre de degrés de liberté disponibles pour les particules libres à $3N-S$. Il est à remarquer que les conditions auxiliaires ne font entrer que des fonctions correctement symétrisées dans les variables particules.

Dans le cas où $k \cdot \vec{p}_i / \omega_k \ll 1$ ($\vec{p}_i$ étant l'impulsion des particules libres), les formes de H_c , H_p et H_L se simplifient beaucoup. On obtient entre autre, pour la masse effective des particules:

$$m^* = m \left(1 - \frac{S}{3N} \right)^{-1}$$

Le terme H_L correspond à une interaction dipolaire attractive entre les particules. La condition subsidiaire s'exprime sous la forme:

$$\left(\sum_i \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}_i) \right) \xi = 0 \quad (2.1-18)$$

c'est-à-dire ne fait pas entrer les impulsions des particules.

L'étude de la fonction d'onde à une particule excitée montre que la condition subsidiaire (2.1-18) implique que:

-Pour $k < k_D$, il n'y a pas d'excitations à une particule possible.

-Pour $k \equiv 0$ et $k > k_D$, il n'y a pas de conditions subsidiaires.

Donc l'état où toutes les particules ont une impulsion nulle n'est pas exclu par les modes collectifs. Le premier état à une particule excitée se situera à $k=k_D$, tandis que pour $k < k_D$, le système est totalement décrit par les modes collectifs.

APPLICATIONS A L'HELIUM LIQUIDE.

Considérons un bain d'hélium liquide de densité uniforme et perturbons la densité en un point du liquide. Le liquide aura tendance à retourner à l'équilibre, ce qui donnera lieu à des oscillations qui sont justement les ondes sonores. Il apparaît donc clairement que les variables collectives à considérer sont les transformées de Fourier de la fluctuation de densité

$$\rho_k = \int \rho(x) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} \quad k \neq 0$$

A) La première description d'un système de bosons en termes de variables collectives est due à Zubarev et Bogolioubov [2.1-6]. Ils cherchent le premier état excité et l'énergie de l'état fondamental d'un gaz de bosons en interactions faibles. Ils expriment la fonction d'onde du système de N particules en fonction des transformées de Fourier des fluctuations de densité ρ_k , d'où $\Phi(t, \rho_k, \dots, \rho_k, \dots)$ dépendant d'un nombre infini de variables ρ_k . Ils écrivent alors l'équation de Schrödinger pour Φ (en première quantification). L'hamiltonien, exprimé dans les variables ρ_k et $d/d\rho_k$ n'est pas hermitien du fait que la transformation faisant passer aux ρ_k n'est pas canonique. Ils peuvent rendre la principale partie de l'hamiltonien hermitien en considérant l'équation de Schrödinger pour une nouvelle fonction d'onde:

$$\Phi \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_k \rho_k \rho_{-k} \right\} \varphi$$

En introduisant des variables "phononiques" b_k et b_k^+ comme combinaison linéaire des ρ_k et $d/d\rho_k$, ils obtiennent l'équation:

$$i\hbar \partial_t \Phi = H\Phi = \left(\sum_{\vec{k}} E_k b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + \text{ordres supérieurs en } b^+ b b \right) \Phi$$

où $E_k = \left(\frac{N}{V} v_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 \right)^{1/2}$ est l'énergie de Bogolioubov.

L'état fondamental du système Φ_0 s'écrit:

$$\Phi_0 = \exp \left(- \sum_{\vec{k}} \frac{p_{\vec{k}} p_{-\vec{k}}}{8 E_k^2} \right)$$

et le premier état excité:

$$\Phi_{\vec{k}} = b_{\vec{k}}^+ \Phi_0 = (2 E_k N)^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^N \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}_j) \right) \Phi_0$$

Zubarev et Bogolioubov obtiennent donc bien un spectre "phononique" de vitesse c_B pour petits k et un premier état excité du type Feynman.

Toutefois, les points faibles de la théorie résident dans le fait qu'il y a un nombre infini de $p_{\vec{k}}$ alors que le nombre de degrés de liberté des atomes est de $3N$. D'autre part, la non hermiticité de l'hamiltonien hypothétique la signification d'une éventuelle théorie de perturbation effectuée avec la partie anharmonique.

B) K. Horoike [2.1-7] a reconsidéré le problème de Zubarev et Bogolioubov. En décrivant l'hamiltonien non plus en termes des $p_{\vec{k}}$ et $d/dp_{\vec{k}}$, mais à l'aide d'une fonctionnelle $\mathcal{D}(p_{\vec{k}})$ reliée au Jacobien de la transformation faisant passer des variables $(\vec{r}_j)$ aux variables $(p_{\vec{k}})$. Il obtient un hamiltonien hermitique. Dans l'approximation harmonique, il obtient les mêmes résultats que Zubarev et Bogolioubov. Il calcule l'énergie de l'état fondamental et celle du premier état excité au 2^e ordre de théorie de

perturbation dans le terme harmonique.

D'autre part, abordant le problème du nombre de degrés de liberté, Horoike limite les nombres d'onde à $k < k_c$, k_c étant relié aux $3N$ degrés de liberté permis. Il se pose alors le problème de l'équivalence des descriptions en termes de particules ou d'excitations collectives. En se basant sur les travaux de J.K. Percus et G.J. Yevick [2.1-8,9] concernant les singularités de la transformation faisant passer de l'espace de configuration à l'espace des variables collectives, Horoike montre que sa description est valable si le nombre total de phonons est limité, c'est-à-dire, si $n_{\vec{k}}$ est le nombre de phonons du mode $\vec{k}$:

$$\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \leq N$$

Cela revient à dire en quelques sorte, que la théorie n'est valable que si les fluctuations de densité autour de sa valeur moyenne sont suffisamment petites.

C) D. Bohm et B. Salt [2.1-10] ont appliqué directement à l'hélium la description de Bohm et Pines décrite au début de ce paragraphe pour les plasmons. Une première difficulté provient du fait que le potentiel d'interaction entre les atomes d'hélium possède une partie de type "corps dur". On peut remplacer le corps dur par un potentiel "presque impénétrable" de manière à ce que la transformée de Fourier V_k existe. Mais il n'en reste pas moins que pour un potentiel "presque impénétrable" la position des particules ne peut plus être aléatoire et l'approximation RPA appliquée dans le cas des plasmons n'est plus valable ici. Cette difficulté est

contournée en effectuant une transformation de l'espace de configuration des particules $\{\vec{r}_i\}$ en un nouvel espace $\{\vec{X}_i\}$ correspondant à l'ancien espace $\{\vec{r}_i\}$ percé de trous au voisinage des particules. Les conditions sous lesquelles une telle transformation a un sens sont discutées par Eger et Gross [2.1-11]. L'avantage de travailler dans ce nouvel espace est que la partie "corps dur" du potentiel est éliminée et il ne reste plus qu'un potentiel "mou" dans l'espace troué pour lequel l'approximation RPA est valable. La grandeur significative pour la fréquence des oscillations collectives n'est plus le potentiel interparticules mais plutôt le mouvement du point zéro, relié au fait que les particules doivent être séparées par une distance étant au minimum égale au rayon de la particule. La partie collective décrit les phonons, alors que les autres degrés de liberté sont pris par les quasi-particules appelées "rotons" et se mouvant pratiquement indépendamment des excitations phononiques. Une évaluation de la valeur critique k_c correspondant à la séparation entre modes collectifs et particules individuelles donne $k_c \sim 1 \text{ \AA}^{-1}$, ce qui correspond à la fin de la partie linéaire du spectre dans l'hélium. D'autre part, $k_c \approx 1 \text{ \AA}^{-1}$ correspond à un nombre de degrés de liberté $S \approx N$, ce qui indique bien que tous les modes longitudinaux d'oscillation sont décrits par les phonons. Dans cette description, on peut considérer les rotons comme "écrantés" par les phonons dans le sens que tout roton est accompagné de phonons qui "avertissent" les autres particules de l'arrivée imminente du roton en mouvement. Il se forme ainsi à l'avant du roton, un "couloir" qui lui permet de se propager en ayant peu d'interactions. Il en résulte un effet de "back-flow" donnant lieu à une interaction à longue portée de type dipôle-dipôle entre les

rotons. Pour un roton se déplaçant à la vitesse du son, le milieu environnant ne peut plus être "averti" de l'arrivée du roton. L'effet est analogue au problème du mur du son en aérodynamique. Ce fait se traduit dans ce formalisme par une augmentation de la masse effective du roton qui devient infinie.

Cette description permet aussi de prévoir que le spectre des excitations à grands $\vec{k}$ possédera un plateau comme prédit par Pitaevski [2.1-12], Ruwals et Zawadowski [2.1-13], puis dérivé microscopiquement par Fenz [1-29]. Comme nous l'avons déjà vu, les conditions auxiliaires jouent un rôle essentiel dans cette méthode. Dans ce cas, en utilisant explicitement le fait que les particules ont un caractère bosonique, elles impliquent que les excitations de particules individuelles sont impossibles à grandes longueurs d'onde. La propriété de superfluidité de l' He^4 apparaît donc comme intimement liée à la statistique.

D) Indépendamment de Bohm, T. Nishiyama [2.1-14,15,16,17,18,19] a développé un formalisme similaire. Il exprime l'hamiltonien d'un système de N bosons en interaction, en termes des transformées de Fourier des fluctuations de densité $\rho_{\vec{k}}$ et des variables conjuguées $\phi_{\vec{k}}$. Il s'arrête aux termes cubiques dans ces variables. Dans le but de séparer le mouvement collectif du mouvement des particules individuelles, il introduit pour les grandes longueurs d'onde les variables auxiliaires $Q_{\vec{k}}$ et $P_{\vec{k}}$ canoniquement conjuguées et obtenues à partir des $\rho_{\vec{k}}$ et $\phi_{\vec{k}}$ par une transformation unitaire du type:

$$u^{-1} \rho_{\vec{k}} u = Q_{\vec{k}} \qquad u^{-1} \phi_{\vec{k}} u = P_{\vec{k}} \qquad (2.1-19)$$

avec: $U = U_1 U_2 U_1$ et :

$$U_1 = \prod_{k < k_c} \exp(i p_k P_k) \quad U_2 = \prod_{k < k_c} \exp(-i \phi_k Q_k)$$

k_c étant le nombre d'onde critique séparant la description collective de celle en termes de particules.

L'hamiltonien obtenu après transformation unitaire est équivalent à l'hamiltonien de départ, si on ajoute les conditions auxiliaires suivantes:

$$\Omega_k \psi = \left(\frac{1}{2\sqrt{N}} P_k + i\sqrt{N} \phi_k \right) \psi = 0 \quad \text{pour } k < k_c \quad (2.1-20)$$

pour tout état ψ du système.

Si l'on suppose qu'une grande partie des particules sont dans le condensé, alors on peut écrire, (A et A^+ étant les opérateurs relatifs aux particules):

$$P_k = \sum_q A_q^+ A_{q+k} \approx A_{-k}^+ A_0 + A_0^+ A_k$$

$$\phi_k \approx \frac{i}{2N} (A_k^+ A_0 - A_0^+ A_{-k}) \quad (2.1-21)$$

alors $\Omega_k \psi = N^{-1/2} A_0^+ A_k \psi = 0$ si $k < k_c$

Cela signifie donc qu'on ne peut pas exciter des particules individuelles avec $k < k_c$ et que, dans ce domaine, le problème est bien décrit en termes de variables collectives. Comme chez Bohm, l'hamiltonien du système s'exprime alors sous la forme: $H = H_0 + H_p + H_I$

où H_0 décrit une assemblée de phonons d'énergie $E_{\text{Bogolioubov}}$ et de nombre d'onde $k < k_c$.

H_p décrit une assemblée de particules indépendantes d'impulsion $k > k_c$.

H_I décrit l'interaction particules-phonons.

Nishiyama obtient aussi une interaction dipolaire entre particules, qui peut être attractive, résultant de l'échange de phonons entre deux parti-

cules. (Remarquons l'analogie avec la supraconductivité, où deux électrons forment un état lié en échangeant un phonon). C'est là l'origine des théories de l'état lié de deux rotons. Le plateau du spectre à grands k apparaît également. Sa provenance est attribuée à l'interaction entre les états à une particule et les états de paires (hybridisation).

Nous pouvons donc classifier en deux catégories les différentes approches d'une description de l'hélium liquide en termes de variables collectives.

1). Les théories dans lesquelles on sépare la partie collective (phonons) de la partie décrite en termes de particules libres. Cette description donne une bonne idée qualitative du comportement physique du système sans tenir compte de l'interaction particule-phonon. Dans cette approximation, on obtient pour petits k un spectre phononique du type Bogolioubov. Pour obtenir un résultat plus significatif, il faut tenir compte de l'interaction particule-phonon dans un calcul de perturbation. La présence du condensé ne se manifeste que pour la partie "particule" de la description et donc pour petits k ne se manifestera qu'à travers la renormalisation due à l'interaction particule-phonon.

2). Les théories qui ne séparent pas les excitations collectives des particules libres. Au plus bas ordre, le système est décrit comme un gaz de phonons libres ayant un spectre de Bogolioubov. Toute la partie non triviale du problème est exprimée en termes d'interactions anharmoniques

phonon-phonon. Le caractère "particule" et par là même la présence du condensé n'apparaît plus dans ce formalisme.

Comme nous nous intéressons au domaine des basses températures où seuls les phonons sont pratiquement excités, nous choisirons un modèle du deuxième type que nous renormaliserons à tous les ordres (dans la limite des petits k) pour mettre en évidence les bases microscopiques du modèle hydrodynamique de Landau.

II.2. LE MODELE DE SUNAKAWA.

Le modèle choisi est celui développé par Sunakawa [2.2-1,2,3]. Une approche similaire a été développée indépendamment par Birter et Morrison [2.2-4].

II.2.1. DEFINITION DES VARIABLES COLLECTIVES.

Considérons un système de N bosons en interactions dans une boîte de volume Ω à $T = 0$. (nous poserons $\hbar = 1$)

Le système est décrit par l'hamiltonien:

$$H = T + V = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \psi^\dagger(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}') V(\vec{x} - \vec{x}') \psi(\vec{x}') \psi(\vec{x}) \quad (2.2-1)$$

$\psi^\dagger$ et ψ sont les opérateurs de champ satisfaisant les relations de commutation:

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{x}) ; \psi^\dagger(\vec{x}')]_- &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\psi(\vec{x}) ; \psi(\vec{x}')]_- &= [\psi^\dagger(\vec{x}) ; \psi^\dagger(\vec{x}')]_- = 0 \end{aligned} \quad (2.2-2)$$

Remarquons que l'hamiltonien conserve le nombre de particules: $[H, N]_- = 0$

En particulier: $\langle \psi(\vec{x}) \rangle = 0$

Introduisons de manière habituelle les opérateurs de création et d'annihilation des atomes d'hélium:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ \psi^\dagger(\vec{x}) &= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

satisfaisant les relations de commutation:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}} ; a_{\vec{k}'}^+]_- &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [a_{\vec{k}} ; a_{\vec{k}'}]_- &= [a_{\vec{k}}^+ ; a_{\vec{k}'}^+]_- = 0 \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

En supposant de plus que le potentiel $V(\vec{x})$ possède une transformée de Fourier, (le "corps dur" peut être remplacé par un potentiel "presque im-pénétrable) posons:

$$V(\vec{x}) = \Omega^{-1} \sum_{\vec{k}} V(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.2-5)$$

Introduisons la paire de variables collectives:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) &= \psi^+(\vec{x}) \psi(\vec{x}) = \text{opérateur densité de particules} \\ \vec{g}(\vec{x}) &= -\frac{i}{2} \{ \psi^+(\vec{x}) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) - \vec{\nabla} \psi^+(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \} \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

Du fait que l'hamiltonien conserve le nombre de particules, nous avons:

$$\rho(\vec{x}) = nI + \rho'(\vec{x}) = \Omega^{-1} \sum_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.2-7)$$

où $n = \frac{N}{\Omega}$ =densité moyenne de particules= nombre complexe $\rho'(\vec{x})$ décrivant les fluctuations de densité.

$$\text{De même} \quad \vec{g}(\vec{x}) = \Omega^{-1} \sum_{\vec{k}} \vec{g}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.2-8)$$

$$\text{où} \quad \rho_{\vec{k}} = \sum_{\vec{q}} a_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}^+ a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}} \quad (\rho_0 = N) \quad (2.2-9)$$

$$\vec{g}_{\vec{k}} = \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}^+ a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}$$

Il découle immédiatement de (2.2-4) et (2.2-9) les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} [p_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- &= 0 \\ [\vec{q}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- &= \vec{k}' p_{\vec{k}' - \vec{k}} \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

$$\begin{aligned} [q_{\vec{k}}^{(i)} ; q_{\vec{k}'}^{(j)}]_- &= q_{\vec{k} + \vec{k}'}^{(i)} k_j - q_{\vec{k} + \vec{k}'}^{(j)} k_i \\ \text{où } \vec{q}_{\vec{k}} &= (q_{\vec{k}}^{(1)}, q_{\vec{k}}^{(2)}, q_{\vec{k}}^{(3)}) \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

Nous voyons donc que $\vec{q}_{\vec{k}}$ et $p_{\vec{k}'}$ ne forment pas un ensemble de variables canoniquement conjuguées. Dans le but de trouver une nouvelle variable collective canoniquement conjuguée à $p_{\vec{k}}$, introduisons la nouvelle variable $\vec{v}_{\vec{k}}$ définie par l'équation intégrale suivante:

$$\vec{v}_{\vec{k}} = \vec{q}_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} p_{\vec{p} - \vec{k}} \vec{v}_{\vec{p}} \quad (2.2-11)$$

Les relations de commutation s'écrivent alors:

$$[p_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- = 0 \quad (2.2-12a)$$

$$\begin{aligned} [\vec{v}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- &= [\vec{q}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- - \frac{1}{N} \left[\sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} p_{\vec{p} - \vec{k}} \vec{v}_{\vec{p}} ; p_{\vec{k}'} \right]_- = \\ &= \vec{k}' p_{\vec{k}' - \vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} p_{\vec{p} - \vec{k}} [\vec{v}_{\vec{p}} ; p_{\vec{k}'}]_- \end{aligned}$$

en itérant et en séparant le terme $\vec{p} = \vec{k}'$

$$\begin{aligned} [\vec{v}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- &= \vec{k}' p_{\vec{k}' - \vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} p_{\vec{p} - \vec{k}} \left\{ [\vec{q}_{\vec{p}} ; p_{\vec{k}'}]_- - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q} \neq \vec{p}} [p_{\vec{q} - \vec{p}} \vec{v}_{\vec{q}} ; p_{\vec{k}'}]_- \right\} \\ &= \vec{k}' p_{\vec{k}' - \vec{k}} - \frac{1}{N} \vec{k}' p_{\vec{k}' - \vec{k}} p_0 (1 - \delta_{\vec{k}, \vec{k}}) - \frac{\vec{k}'}{N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}, \vec{p} \neq \vec{k}'} p_{\vec{p} - \vec{k}} p_{\vec{k}' - \vec{p}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{k'}{N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}; \vec{p} \neq \vec{k}'} p_{\vec{p}-\vec{k}} p_{\vec{k}'-\vec{p}} + \frac{k'}{N^2} \sum_{\substack{\vec{p} \neq \vec{k}; \vec{q} \neq \vec{p} \\ \vec{q} \neq \vec{k}'}} p_{\vec{p}-\vec{k}} p_{\vec{k}'-\vec{p}} p_{\vec{k}'-\vec{q}} + \dots$$

Par inspection on remarque que les termes du membre de droite se compensent deux à deux, excepté le terme $\vec{k}' p_{\vec{k}'-\vec{k}} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$,

$$\text{Donc: } [\vec{v}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- = N \vec{k}' \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.2-12b)$$

De la même manière, on obtient:

$$[v_{\vec{k}}^{(i)} ; v_{\vec{k}'}^{(j)}]_- = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{p}} p_{\vec{p}-\vec{k}-\vec{k}'} \{ p_i v_{\vec{p}}^{(j)} - p_j v_{\vec{p}}^{(i)} \} - \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\vec{p} \neq \vec{k}; \vec{q} \neq \vec{k}'}} p_{\vec{p}-\vec{k}} p_{\vec{q}-\vec{k}'} [v_{\vec{p}}^{(i)} ; v_{\vec{q}}^{(j)}]_- \quad (2.2-12c)$$

Pour $\vec{k}' \neq \vec{k}$, $\vec{v}_{\vec{k}}$ et $p_{\vec{k}'}$ commutent, ce qui nous permet d'écrire (2.2-11) sous la forme:

$$\vec{v}_{\vec{k}} = \vec{g}_{\vec{k}} - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} \{ p_{\vec{p}-\vec{k}} \vec{v}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} p_{\vec{p}-\vec{k}} \} \quad (2.2-13)$$

ceci pour $\vec{k} \neq 0$. Nous pouvons supposer $\vec{g}_0 = 0$, c'est-à-dire que l'impulsion totale du système est zéro et que $\vec{v}_0 = 0$

$$\text{Définissons alors: } \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{mN} \sum_{\vec{k}} \vec{v}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.2-14)$$

On a les relations de commutation:

$$[p(\vec{x}) ; p(\vec{x}')]_- = 0 \quad (2.2-15a)$$

$$\begin{aligned} [\vec{v}(\vec{x}) ; p(\vec{x}')]_- &= [\vec{v}(\vec{x}) ; p'(\vec{x}')]_- = \frac{1}{mN\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} [\vec{v}_{\vec{k}} ; p_{\vec{k}'}]_- e^{i(\vec{k}\vec{x} - \vec{k}'\vec{x}')} \\ &= \frac{1}{m\Omega} \sum_{\vec{k}} \vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = \frac{1}{m\Omega} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \sum_{\vec{k}} -ie^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = -\frac{i}{m} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned} \quad (2.2-15b)$$

De la même manière, on obtient:

$$[v^{(i)}(\vec{x}) ; v^{(j)}(\vec{x}')]_{-} = \frac{i}{m} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \rho^{-1}(\vec{x}) \left(\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) \right)^{(k)} \quad (2.2-15c)$$

(i,j,k) permutations cycliques de (1,2,3)

Nous retrouvons les relations de commutation (1-3) postulées par Landau entre l'opérateur de densité $\rho(\vec{x})$ et l'opérateur de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$. Nous sommes donc conduit à interpréter la grandeur $\vec{v}(\vec{x})$ introduite microscopiquement comme étant la vitesse du fluide. Nous allons adopter $\rho(\vec{x})$ et $\vec{v}(\vec{x})$ comme couple de variables collectives.

Nous voyons encore de (2.2-13) que

$$\vec{g}_k = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{p}} \left\{ \rho_{\vec{p}-k} v_{\vec{p}} + v_{\vec{p}} \rho_{\vec{p}-k} \right\} \quad (2.2-16)$$

il suit alors de (2.2-7,8,14) que

$$\vec{g}(\vec{x}) = \frac{m}{2} \left\{ \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}) + \vec{v}(\vec{x}) \rho(\vec{x}) \right\} \quad (2.2-17)$$

II.2.2. CONDITIONS D'EXISTENCE DES VARIABLES COLLECTIVES.

La question de savoir si l'on peut définir un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ canoniquement conjugué à la densité de particules $\rho(\vec{x})$ de manière consistante est très controversée et a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Dans l'approche de Landau, la définition de $\vec{v}(\vec{x})$ fait appel à l'opérateur $\rho^{-1}(\vec{x})$. La difficulté provient du fait que $\rho^{-1}(\vec{x})$, n'est pas défini. Pour s'en convaincre, plaçons-nous dans l'espace de configuration à N particules. Soit $\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ la fonction d'onde décrivant une collection de particules situées aux points $\vec{x}_i$. On a alors:

$$\rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = 0 \quad \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}_i$$

Donc l'ensemble de toutes les fonctions $\{\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) : \vec{x} \neq \vec{x}_i\}$ forme un sous espace associé à la valeur propre zéro de $\rho(\vec{x})$. En conséquence, $\rho^{-1}(\vec{x})$ n'est pas défini sur ce sous espace. Une simple manipulation formelle de $\rho^{-1}(\vec{x})$ peut conduire à des résultats erronés [2.2-5].

Afin d'éviter cette difficulté, on peut se demander s'il est possible de définir un champ de vitesse sans faire intervenir explicitement l'opérateur $\rho^{-1}(\vec{x})$. Plusieurs tentatives ont été faites dans ce sens.

A) Garisson, Morison et Wong [2.2-6,7] montrent que la relation

$$[\vec{v}(\vec{x}) ; \rho(\vec{x}')]_- = -i \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2-18)$$

est la solution la plus simple assurant la covariance sous les transformations de Galilée et la localité. Ils démontrent également rigoureusement la proposition de Fröhlich [2.2-8,9] selon laquelle l'opérateur $\rho(\vec{x})$ satisfaisant la relation de commutation (2.2-18) doit avoir pour spectre

la droite réelle $(-\infty; +\infty)$. Les relations de commutation (2.2-18) sont donc incompatibles avec une densité de particules positive en tout point. (nous verrons plus loin comment éviter cette difficulté)

B) En établissant un parallèle entre l'ordre à longue portée présent dans un superfluide (ODLRO) et la cohérence du champ électromagnétique, Turski [2.2-10] aborde le problème en termes d'états cohérents de Glauber.

Les états cohérents sont définis par: $\psi(\vec{x})|\alpha\rangle = \alpha(\vec{x})|\alpha\rangle$

$\alpha(\vec{x})$ étant identifiée à la fonction d'onde du condensé. Compte tenu des propriétés de la représentation de Glauber, Turski obtient un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ défini par:

$$\vec{v}_\alpha(\vec{x}) = \langle \alpha | \vec{v}(\vec{x}) | \alpha \rangle = \frac{\langle \alpha | \vec{j}(\vec{x}) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \rho(\vec{x}) | \alpha \rangle} = \vec{\nabla} \phi_\alpha(\vec{x})$$

c'est-à-dire dérivant d'un potentiel.

Ce champ de vitesse satisfait les règles de commutation (2.2-18), mais le problème du spectre de $\rho(\vec{x})$ négatif reste entier.

C) Eckstein et Varga [2.2-11,12] dérivent également un champ de vitesse sans faire appel à $\rho^{-1}(\vec{x})$. Pour cela, ils considèrent N particules dans une boîte aux conditions périodiques. Ils postulent une forme pour le champ de vitesse ayant d'une part les bonnes propriétés sous une transformation de Galilée et d'autre part satisfaisant les relations de commutation (2.2-18). Le fait que le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ ne puisse être défini qu'aux N points $\vec{x}_\alpha$ où se trouvent des particules, implique qu'il n'y a que N composantes de Fourier $\vec{v}_{\vec{k}}$ définissant le champ. Aux autres points, $\vec{v}(\vec{x})$

n'est qu'une interpolation choisie la "plus lisse possible" de $\vec{v}(\vec{x}_\alpha)$.

Une telle théorie qui modifie le caractère continu du champ pour tenir compte de l'atomicité du système (aussi utilisée dans le cadre de la théorie de Debye du cristal) est appelée par London théorie du pseudo-continu [2.2-13].

Aux N composantes $\vec{v}_k$ définies correspondent N composantes ρ_k . On a donc:

$$\bar{\rho}(\vec{x}) = \sum' \rho_k e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_{\alpha} d(\vec{x}-\vec{x}_{\alpha}) \quad (2.2-19)$$

où $\sum'$ est limitée aux valeurs de $k \ll k_0 \sim 1/a$ (a = distance interatomique moyenne). La présence du cutt-off sur les vecteurs d'onde introduit une non-localité dans la théorie. La fonction $d(\vec{x}-\vec{x}_{\alpha})$ est une fonction de type Dirac centrée sur $\vec{x}_{\alpha}$ mais dont la largeur est de l'ordre de la distance interatomique moyenne. Les champs $\bar{\rho}(\vec{x})$ et $\bar{\vec{v}}(\vec{x})$ ne sont plus alors purement locaux. [2.2-14]. On peut écrire:

$$\bar{\rho}(\vec{x}) = \int d(\vec{x}-\vec{y}) \rho(\vec{y}) d^3y \quad (2.2-20)$$

avec $\int d^3x d(\vec{x}) = 1$

Les relations de commutation deviennent aussi non locales:

$$[\bar{\vec{v}}(\vec{x}) ; \bar{\rho}(\vec{x})]_- = -i \bar{\vec{v}} d(\vec{x}-\vec{x}') \quad (2.2-21)$$

Cette non localité permet d'éliminer l'objection de London sur la violation du principe d'incertitude de Heisenberg [2.2-15]. En effet, la forme locale des relations de commutation nécessite de connaître exactement la vitesse et la position d'une particule, ce qui contredit le principe d'incertitude. Cette objection est écartée par la non localité. Il suffit qu'une particule soit dans un voisinage de $\vec{x}$ pour qu'elle contribue à $\vec{v}(\vec{x})$.

Inversement la mesure de la vitesse d'une particule $\vec{v}(\vec{x}_a)$ correspond à une certaine incertitude sur $\vec{x}_a$. Comment passer de la forme non locale (2.2-21) des relations de commutation, à la forme locale (2.2-18)? Il suffit d'éliminer l'arbitraire lié à l'interpolation des champs en demandant qu'en chaque point où l'on mesure la vitesse il y ait une particule. Cela s'obtient en multipliant tout opérateur de vitesse $\vec{v}(\vec{x})$ à l'intérieur du commutateur par $\rho(\vec{x})$. L'expression s'annulera s'il n'y a pas de particules au point de mesure. On a donc l'expression locale:

$$\rho(\vec{x}) [\vec{v}(\vec{x}) ; \rho(\vec{x}')]_- = -i \rho(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.2-22)$$

Qu'en est-il dans notre formalisme? Le point essentiel est que l'hamiltonien conserve le nombre de particules. Cela nous a permis de séparer $\rho(\vec{x})$ en une densité moyenne n qui est un scalaire et $\rho'(\vec{x})$ décrivant les fluctuations et jouant le rôle de variable conjuguée à $\vec{v}(\vec{x})$. Pour que le développement (2.2-11) converge, il est nécessaire que les fluctuations de densité soient plus petites que la densité moyenne, c'est-à-dire :

$$| \langle \rho'(\vec{x}) \rangle | \ll n \quad (2.2-23)$$

Cela correspond bien à une description pseudo-continue, où la densité est définie en tout point et ne s'annule jamais. Les sommations sur les impulsions apparaissant seront donc limitées par le cutt-off k_0 , donné par la distance interatomique moyenne. La condition (2.2-23) est similaire à la restriction sur le nombre de phonons de Horiike. Un cutt-off sur k est donc propre à toute description d'un système de particules en termes de variables collectives.

II.2.3. EXPRESSION DE L'HAMILTONIEN DANS LES VARIABLES COLLECTIVES.

Nous voulons exprimer l'hamiltonien (2.2-1) en termes de variables collectives. Dans ce but, introduisons le projecteur P défini par:

$$P = \psi(\vec{x}) \rho^{-1}(\vec{x}) \psi^+(\vec{x}) \quad (2.2-24)$$

et ayant les propriétés suivantes:

- i) $P = P^2 = P^+$
- ii) $\psi^+(\vec{x}) = \psi^+(\vec{x}) P \quad (2.2-25)$
- iii) $\psi(\vec{x}) = P \psi(\vec{x})$

Les valeurs propres de P sont 0 et 1.

Supposons alors qu'il existe un état $|0\rangle$ tel que:

$$P|0\rangle = 0|0\rangle$$

Comme nous avons affaire à des bosons $\psi^+(\vec{x})|0\rangle \neq 0 \quad (2.2-26)$

$$\text{Mais } \psi^+(x)|0\rangle = \psi^+(x)P|0\rangle = 0$$

ce qui est contradictoire.

Nous en concluons qu'il n'existe pas d'état $|0\rangle$, c'est-à-dire que la valeur propre zéro du projecteur est à exclure dans le cas des bosons.

Autrement dit, pour que système de bosons

$$P = I = \text{opérateur identité.} \quad (2.2-27)$$

La condition (2.2-26) n'est pas toujours vraie pour les fermions. Le caractère bosonique des atomes formant le liquide est donc ici essentiel.

Regardons la partie cinétique de (2.2-1) en insérant $P = I$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \psi^+(\vec{x}) P \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \psi^+(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \psi^+(\vec{x}) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.2-28)$$

mais de (2.2-6) on obtient:

$$\begin{aligned} i \vec{\nabla} \psi^+(\vec{x}) \psi(\vec{x}) &= \vec{g}(\vec{x}) + \frac{i}{2} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \\ -i \psi^+(\vec{x}) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) &= \vec{g}(\vec{x}) - \frac{i}{2} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.2-29)$$

en remplaçant dans (2.2-28)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{g}(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{g}(\vec{x}) + \frac{1}{8m} \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \\ &\quad + \frac{i}{4} \int d^3\vec{x} \left\{ \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \right\} \end{aligned} \quad (2.2-30)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \psi^+(\vec{x}) \psi^+(\vec{x}') V(\vec{x} - \vec{x}') \psi(\vec{x}') \psi(\vec{x}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}) V(\vec{x} - \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \frac{N}{2} V(\vec{x} = 0) \end{aligned} \quad (2.2-31)$$

Développons $\rho^{-1}(\vec{x})$ en puissances de $\rho'(\vec{x})$

$$\frac{1}{\rho(\vec{x})} = \frac{1}{n + \rho'(\vec{x})} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\frac{\rho'(\vec{x})}{n} \right\}^m \quad (2.2-32)$$

Le premier terme de (2.2-30) s'écrit:

$$T_1 = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{g}(\vec{x}) \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{g}(\vec{x}) = \frac{\Omega}{2mN} \int d^3\vec{x} \vec{g}(\vec{x}) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\frac{\rho'(\vec{x})}{n} \right\}^m \vec{g}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{\Omega}{2mN} \left\{ \int d^3x \vec{g}(x) \vec{g}(x) - \left(\frac{N}{\Omega} \right)^{-1} \int d^3x \vec{g}(x) \rho'(x) \vec{g}(x) + \dots \right\}$$

où avec (2.2-7,8):

$$T_1 = \frac{1}{2mN} \left[\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \vec{V}_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}+\vec{q}} \vec{V}_{\vec{q}} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q} \\ \vec{p}-\vec{k} \neq 0}} \vec{V}_{\vec{p}} \rho_{\vec{p}-\vec{k}} \rho_{\vec{q}+\vec{k}} \vec{V}_{\vec{q}} \right. \\ \left. - \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{p} \\ \vec{q} \neq \vec{k} \neq 0}} \vec{V}_{\vec{q}} \rho_{\vec{p}-\vec{k}} \rho_{\vec{q}+\vec{k}} \vec{V}_{\vec{q}} - \frac{1}{N^3} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q} \\ \vec{r}-\vec{p} \neq 0, \vec{p}+\vec{k} \neq 0}} \vec{V}_{\vec{r}} \rho_{\vec{r}-\vec{p}} \rho_{\vec{p}+\vec{k}} \rho_{\vec{q}-\vec{k}} \vec{V}_{\vec{q}} + \dots \right] \quad (2.2-33)$$

Les second et troisième termes du membre de droite se compensent. Par inspection des termes suivants dans le développement, on remarque que les autres termes se compensent deux à deux. Il ne reste plus que:

$$T_1 = \frac{1}{2mN^2} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \vec{V}_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}+\vec{q}} \vec{V}_{\vec{q}} \quad (2.2-34)$$

Le deuxième terme de (2.2-30) s'écrit:

$$T_2 = \frac{1}{8mN} \left[\sum_{\vec{k}} k^2 \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q} \\ \vec{k}+\vec{q} \neq 0}} \vec{k} \cdot \vec{q} \rho_{\vec{k}} \rho_{-(\vec{k}+\vec{q})} \rho_{\vec{q}} \right. \\ \left. + \sum_{r=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{N} \right)^r \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q}, \dots, \vec{m}_i \neq 0 \\ \vec{\alpha} = \vec{k} + \vec{q} + \vec{m}_1 + \dots + \vec{m}_{i-1} \neq 0}} (\vec{k} \cdot \vec{q}) \rho_{\vec{k}} \rho_{\vec{m}_1} \dots \rho_{\vec{m}_{i-1}} \rho_{-\vec{\alpha}} \rho_{\vec{q}} \right] \quad (2.2-35)$$

Le troisième terme de (2.2-30) donne, compte tenu du fait que tous les termes en $\rho'(\vec{x})$ conduisent à des contributions qui se compensent deux à deux :

$$T_3 = -\frac{1}{4m} \sum_{\vec{k}} \vec{k}^2 \quad (2.2-36)$$

Pour la partie potentielle, on obtient de (2.2-31) :

$$V = -\frac{N}{2\Omega} \sum_{\vec{k}} V(\vec{k}) + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} V(\vec{k}) \quad (2.2-37)$$

D'où en regroupant l'hamiltonien :

$$\begin{aligned} H = & \left[-\frac{N}{2\Omega} \sum_{\vec{k}} \left(V(\vec{k}) - \frac{k^2}{4m} \right) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \left[\frac{\vec{V}_{\vec{k}} \vec{V}_{-\vec{k}}}{2m} + \left\{ \frac{k^2}{8m} + \frac{V(\vec{k})N}{2\Omega} \right\} \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right] \right. \\ & + \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q} \\ \vec{k} + \vec{q} \neq 0}} \left[\frac{1}{2mN^2} \vec{V}_{\vec{k}} \rho_{\vec{q}+\vec{k}} \vec{V}_{\vec{q}} + \frac{1}{8mN^2} (\vec{k} \cdot \vec{q}) \rho_{\vec{k}} \rho_{-(\vec{k}+\vec{q})} \rho_{\vec{q}} \right] \\ & + \frac{1}{8mN} \sum_{r=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{N} \right)^r \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q}, \vec{m}_i \neq 0 \\ \vec{\alpha} = \vec{k} + \vec{q} + \vec{m}_1 + \dots + \vec{m}_{i-1} \neq 0}} \vec{k} \cdot \vec{q} \rho_{\vec{k}} \rho_{\vec{m}} \dots \rho_{\vec{m}} \rho_{\vec{\alpha}} \rho_{\vec{q}} \end{aligned} \quad (2.2-38)$$

Comme nous nous intéressons au spectre des excitations élémentaires phonon-roton, considérons tout d'abord le cas irrotationnel.

$$\vec{k} \times \vec{v}_k \mid > = 0 \quad (2.2-39)$$

Sous cette condition, les relations de commutation (2.2-12) s'écrivent

$$\begin{aligned} [\rho_k; \rho_{k'}]_- &= [\vec{v}_k; \vec{v}_{k'}]_- = 0 \\ [\vec{v}_k; \rho_{k'}]_- &= N k' \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (2.2-40)$$

Regardons ce que donne ce modèle au plus bas ordre. Pour celà, introduisons de nouvelles variables collectives B_k^+ et B_k définies par:

$$\rho_k = N^{1/2} \lambda_k (B_k + B_{-k}^+) \quad (2.2-41)$$

$$\vec{v}_k = N^{1/2} \frac{\vec{k}}{2\lambda_k} (B_{-k} - B_k^+)$$

et satisfaisant les relations de commutation:

$$\begin{aligned} [B_k; B_{k'}]_- &= [B_k^+; B_{k'}^+]_- = 0 \\ [B_k; B_{k'}^+]_- &= \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (2.2-42)$$

Nous pouvons alors exprimer (2.2-38) dans ces nouvelles variables. Nous choisissons λ_k de telle manière à ce que les seuls termes quadratiques dans les B soient du type $B_k^+ B_k$. Nous obtenons alors:

$$H = E_0 + H_0 + H_I \quad (2.2-43)$$

$$\text{où: } E_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\vec{k}} \epsilon_k - \frac{N}{2} V(k) - \frac{k^2}{2m} \right) \quad (2.2-44)$$

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} \quad (2.2-45)$$

$$\begin{aligned} H_I = & \frac{1}{8m\sqrt{N}} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{q} \\ \vec{k}+\vec{q} \neq 0}} \vec{k} \cdot \vec{q} \frac{\lambda_{\vec{k}+\vec{q}}}{\lambda_{\vec{k}} \lambda_{\vec{q}}} (1 + \lambda_{\vec{k}}^2 \lambda_{\vec{q}}^2) \cdot \\ & \cdot \left\{ B_{\vec{k}}^+ B_{-(\vec{k}+\vec{q})} B_{\vec{q}}^+ + B_{\vec{k}} B_{-(\vec{k}+\vec{q})} B_{\vec{q}} + B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{q}}^+ B_{\vec{k}+\vec{q}} + B_{\vec{k}+\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} B_{\vec{q}} \right\} \\ & + \frac{1}{8m} \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^{r+1} N^{-r/2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{k}, \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_{i-1} \neq 0 \\ \vec{\alpha} = \vec{k} + \vec{q} + \vec{m}_1 + \dots + \vec{m}_{i-1} \neq 0}} \vec{k} \cdot \vec{q} \lambda_{\vec{k}} \lambda_{\vec{m}_1} \dots \lambda_{\vec{m}_{i-1}} \lambda_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{q}} \cdot \\ & \cdot \mathbb{Z} (B_{\vec{k}}, B_{\vec{m}_1}, \dots, B_{\vec{m}_{i-1}}, B_{\vec{\alpha}}, B_{\vec{q}}) \end{aligned} \quad (2.2-46)$$

$$\begin{aligned} \text{où : } \mathbb{Z} (B_{\vec{k}_1}, \dots, B_{\vec{k}_j}, \dots, B_{\vec{k}_N}) = \\ = \sum_{s=0}^N \sum_{\{j_1 \dots j_s\} \subset \{k_1 \dots k_N\}} B_{-\vec{j}_1}^+ \dots B_{-\vec{j}_s}^+ B_{\vec{k}_{s+1}} \dots B_{\vec{k}_N} \end{aligned} \quad (2.2-47)$$

$\{j_1 \dots j_s\}$ étant une sous suite de $\{k_1 \dots k_N\}$

$$\text{où : } \epsilon_{\vec{k}} = \frac{k}{2m} \left\{ k^2 + \frac{4Nm}{\Omega} V(\vec{k}) \right\}^{1/2} \quad (2.2-48)$$

$$\text{Pour } k \rightarrow 0, \quad \epsilon_{\vec{k}} \simeq \left\{ \frac{NV(\vec{k})}{m\Omega} \right\}^{1/2} k = c_0 k \quad (2.2-49)$$

$$\text{et avec : } \lambda_{\vec{k}}^2 = \frac{k^2}{2m\epsilon_{\vec{k}}} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{k}{2mc_0} \quad (2.2-50)$$

En se limitant à l'hamiltonien H_0 , nous voyons donc que le système peut être représenté par un ensemble de quasi-particules sans interactions, d'énergie $\epsilon_{\vec{k}}$. Nous retrouvons donc le résultat de Zubarev, Bogolioubov et Horiike.

Dans le cas rotationnel où le fluide peut être le siège de mouvements tourbillonnaires (vortex), nous pouvons décomposer la vitesse en une partie irrotationnelle définie par (2.2-41) et une partie rotationnelle représentée par un opérateur $\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}$:

$$\vec{V}_{\vec{k}} = \sqrt{N} \frac{\vec{k}}{2\lambda_{\vec{k}}} (B_{-\vec{k}} - B_{\vec{k}}^+) + \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}} \quad (2.2-51)$$

avec les relations de commutation:

$$[B_{\vec{k}}, \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}]_- = [B_{\vec{k}}^+, \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}]_- = [B_{\vec{k}}, \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}^+]_- = [B_{\vec{k}}^+, \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}^+]_- = 0$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{\vec{k}}^{(i)}, \mathcal{A}_{\vec{k}'}^{(j)}]_- &= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{p}} \rho_{\vec{p}-\vec{k}, \vec{k}'} \{ p_i \mathcal{A}_{\vec{p}}^{(j)} - p_j \mathcal{A}_{\vec{p}}^{(i)} \} \\ &\quad - \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}, \vec{q} \neq \vec{k}'} \rho_{\vec{p}-\vec{k}} \rho_{\vec{q}-\vec{k}'} [\mathcal{A}_{\vec{p}}^{(i)}, \mathcal{A}_{\vec{q}}^{(j)}]_- \end{aligned} \quad (2.2-52)$$

L'hamiltonien (2.2-38) s'écrit alors dans les variables $B_{\vec{k}}$ et $\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}$ sous la forme: $H = E_0 + H_0 + H_{0v} + H_{Ip} + H'_I$ (2.2-53)

où E_0 , H_0 , et H_{Ip} sont définis par (2.2-44, 45, 46.) et:

$$H_{ov} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2mN} \vec{A}_{\vec{k}}^+ \vec{A}_{\vec{k}} \quad (2.2-54)$$

H_{ov} est l'hamiltonien des vortex sans interactions.

$$\begin{aligned} H_I' = & \frac{1}{2m\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}}{\lambda_{\vec{k}}} \vec{A}_{\vec{k}}^+ (B_{-\vec{k}} - B_{\vec{k}}^+) \\ & + \frac{1}{2mN} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} (1 - \delta_{\vec{k}, \vec{q}}) \frac{\lambda_{\vec{k}}}{\lambda_{\vec{q}}} \vec{q} \cdot \vec{A}_{\vec{k}-\vec{q}} \{ B_{\vec{k}} B_{-\vec{q}} + B_{-\vec{k}}^+ B_{-\vec{q}} - B_{\vec{k}} B_{\vec{q}}^+ - B_{-\vec{k}}^+ B_{\vec{q}}^+ \} \\ & + \frac{1}{2mN^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} (1 - \delta_{\vec{k}, \vec{q}}) \lambda_{\vec{k}} (B_{\vec{k}} + B_{-\vec{k}}^+) \vec{A}_{\vec{k}-\vec{q}} \vec{A}_{\vec{q}} \quad (2.2-55) \end{aligned}$$

H_I' comprend donc des termes d'interaction phonon-vortex exprimant la diffusion d'un phonon par un vortex, la transformation de deux phonons en un vortex ou la transformation inverse.

Nous posons $H_I = H_{Ip} + H_I'$

II.3. SPECTRE DES EXCITATIONS A GRANDES LONGUEURS D'ONDE.

II.3.1. FONCTION DE CORRELATION DENSITE-DENSITE.

Nous nous intéressons au spectre des excitations phononiques exact, c'est-à-dire en tenant compte de l'interaction H_I à tous les ordres (2.2-46,54). Un calcul à tous les ordres ne sera possible que dans la limite des grandes longueurs d'onde.

Les phonons étant les quasi particules associées aux fluctuations longitudinales de densité, leur spectre est donné par les singularités de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation densité-densité [2.3 -1]

$$\text{Soit } G_{PP}(\vec{k}, t) = -i \langle T \{ \rho_{\vec{k}}(t) \rho_{-\vec{k}}(0) \} \rangle \quad (2.3-1)$$

La moyenne étant prise dans l'état fondamental de l'hamiltonien (2.2-46,54).

$$\rho_{\vec{k}}(t) = e^{iHt} \rho_{\vec{k}} e^{-iHt} \quad (\text{représentation de Heisenberg})$$

et T est l'opérateur chronologique défini par:

$$T \{ A(t) B(t') \} = \theta(t-t') A(t) B(t') + \theta(t'-t) B(t') A(t) \quad (2.3-2)$$

si A et B sont des opérateurs de type bosonique, avec:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-3)$$

Définissons encore les fonctions de Green:

$$D_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, t) = -i \langle T \{ B_{\vec{k}}^{\beta}(t) B_{\vec{k}}^{\alpha+}(0) \} \rangle \quad (2.3-4)$$

$$\text{où } B_{\vec{k}}^{\alpha} = \begin{cases} B_{\vec{k}} & \text{si } \alpha = 1 \\ B_{-\vec{k}}^{\dagger} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \quad B_{\vec{k}}^{\alpha+} = \begin{cases} B_{\vec{k}}^{\dagger} & \text{si } \alpha = 1 \\ B_{-\vec{k}} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} D_{+}^{+}(\vec{k}, t) &= -i \langle T \{ B_{\vec{k}}(t) B_{\vec{k}}^{\dagger}(0) \} \rangle \\ D_{+}^{-}(\vec{k}, t) &= -i \langle T \{ B_{-\vec{k}}^{\dagger}(t) B_{\vec{k}}^{\dagger}(0) \} \rangle \\ D_{-}^{+}(\vec{k}, t) &= -i \langle T \{ B_{\vec{k}}(t) B_{-\vec{k}}(0) \} \rangle \\ D_{-}^{-}(\vec{k}, t) &= -i \langle T \{ B_{-\vec{k}}^{\dagger}(t) B_{-\vec{k}}(0) \} \rangle \end{aligned} \quad (2.3-5)$$

Du fait que l'hamiltonien (2.2-43) ne conserve pas le nombre de quasi particules $B_{\vec{k}}$, les fonctions de Green $D_{+}^{-}(\vec{k}, t)$ et $D_{-}^{+}(\vec{k}, t)$ ne sont pas nulles.

Introduisons encore les fonctions de Green non perturbées, c'est-à-dire avec $H_1 = 0$.

$$D_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, t) = -i \langle T \{ B_{\vec{k}}^{\beta}(t) B_{\vec{k}}^{\alpha+}(0) \} \rangle \quad (2.3-6)$$

où la moyenne est prise dans l'état fondamental de H_0 , les opérateurs évoluant dans la représentation d'interaction:

$$B_{\vec{k}}(t) = e^{iH_0 t} B_{\vec{k}} e^{-iH_0 t}$$

H_0 conservant le nombre de quasi particules, il s'en suit que:

$$D_{+}^{-}(\vec{k}, t) = D_{-}^{+}(\vec{k}, t) = 0$$

Définissons les transformées de Fourier temporelles par:

$$f(\vec{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3-7)$$

Nous pouvons alors écrire pour $D_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, \omega)$ une équation de Dyson-Beliaev exprimant les $D_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, \omega)$ en termes des $D_{\alpha}^{\circ\beta}(\vec{k}, \omega)$ et des opérateurs de self énergie $M_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, \omega)$ [2.3-2,3, 1-21]. Introduisons les matrices de propagateurs et de self énergies:

$$D(\vec{k}, \omega) = (D_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, \omega)) \quad M(\vec{k}, \omega) = (M_{\alpha}^{\beta}(\vec{k}, \omega)) \quad (2.3-8)$$

L'équation de Dyson-Beliaev s'écrit:

$$D(\vec{k}, \omega) = D^{\circ}(\vec{k}, \omega) + D^{\circ}(\vec{k}, \omega) M(\vec{k}, \omega) D(\vec{k}, \omega) \quad (2.3-9)$$

Les propriétés d'invariance au renversement du temps et d'espace impliquent que seuls deux propagateurs sont indépendants, soit [2.3-4, 1-22] :

$$D_{+}^{+}(\vec{k}, \omega) = D_{-}^{-}(\vec{k}, -\omega) = D(\vec{k}, \omega) \quad (2.3-10)$$

$$D_{+}^{-}(\vec{k}, \omega) = D_{-}^{+}(\vec{k}, \omega) = \overline{D}(\vec{k}, \omega)$$

Les self énergies correspondantes possèdent les mêmes symétries:

$$M_{+}^{+}(\vec{k}, \omega) = M_{-}^{-}(\vec{k}, -\omega) = M(\vec{k}, \omega) \quad (2.3-11)$$

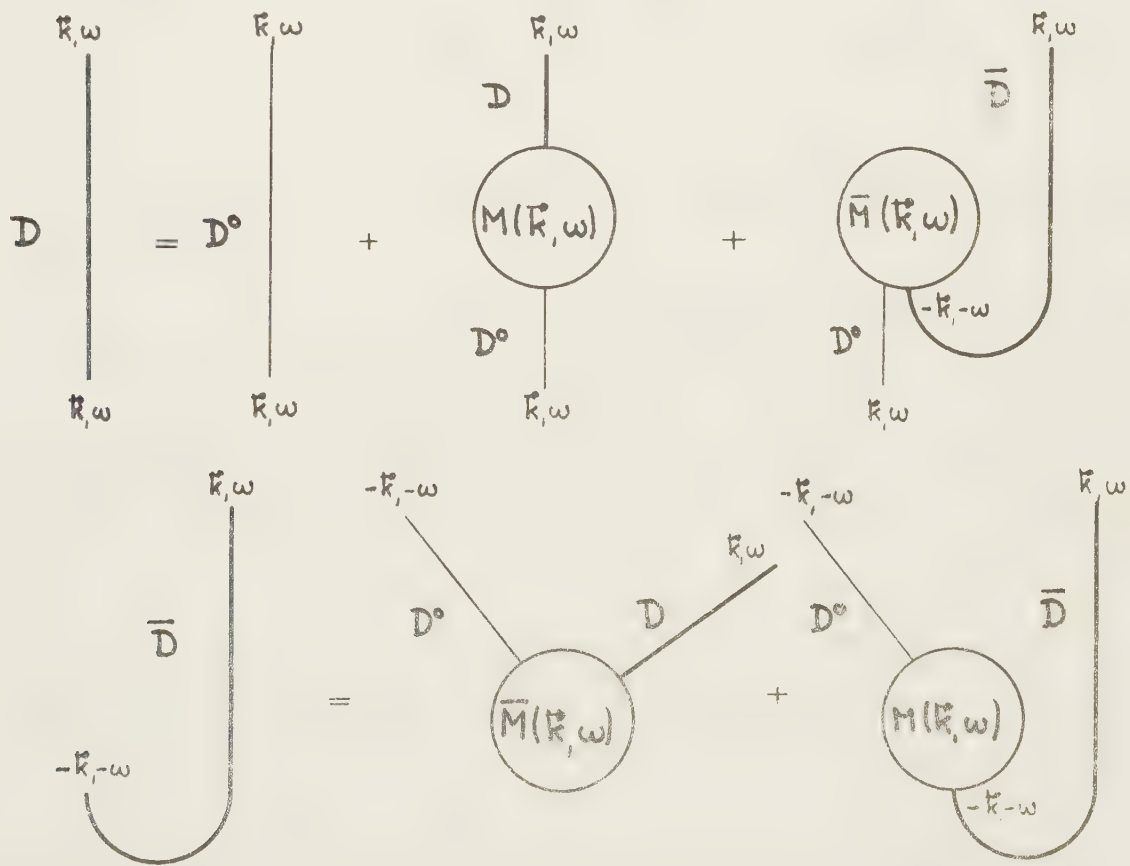
$$M_{+}^{-}(\vec{k}, \omega) = M_{-}^{+}(\vec{k}, \omega) = \overline{M}(\vec{k}, \omega)$$

(2.3-9) conduit alors aux deux équations suivantes:

$$D(\vec{k}, \omega) = D^0(\vec{k}, \omega) + D^0(\vec{k}, \omega) M(\vec{k}, \omega) D(\vec{k}, \omega) + \\ + D^0(\vec{k}, \omega) \bar{M}(\vec{k}, \omega) \bar{D}(\vec{k}, \omega)$$

$$\bar{D}(\vec{k}, \omega) = D^0(-\vec{k}, -\omega) M(-\vec{k}, -\omega) \bar{D}(\vec{k}, \omega) + D^0(-\vec{k}, -\omega) \bar{M}(\vec{k}, \omega) D(\vec{k}, \omega) \quad (2.3-12)$$

ce qui peut être représenté graphiquement sous la forme:



La solution de (2.3-12) est:

$$D(\vec{k}, \omega) = \frac{D^0(\vec{k}, \omega) \{1 - D^0(-\vec{k}, -\omega) M(-\vec{k}, -\omega)\}}{L(\vec{k}, \omega)} \quad (2.3-13)$$

$$\bar{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{D^0(\vec{k}, \omega) D^0(-\vec{k}, -\omega) \bar{M}(\vec{k}, \omega)}{L(\vec{k}, \omega)}$$

où :

$$L(k, \omega) = \left[1 - D^0(k, \omega) M(k, \omega) \right] \left[1 - D^0(-k, -\omega) M(-k, -\omega) \right] - D^0(k, \omega) D^0(-k, -\omega) \bar{M}^2(k, \omega) \quad (2.3-14)$$

Mais $D^0(k, t) = -i \langle T \{ B_k(t) B_k^\dagger(0) \} \rangle_0$

$$B_k(t) = e^{-i\epsilon_k t} B_k$$

$$D^0(k, t) = -i e^{-i\epsilon_k t} \theta(t)$$

d'où $D^0(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i\delta} \quad (\delta \rightarrow +0) \quad (2.3-15)$

En substituant dans (2.3-13), il vient:

$$D(k, \omega) = \frac{\omega + \epsilon_k + M(-k, -\omega)}{\{\omega - \epsilon_k - M(k, \omega)\} \{\omega + \epsilon_k + M(-k, -\omega)\} + \bar{M}^2(k, \omega) + i\delta} \quad (2.3-16)$$

$$\bar{D}(k, \omega) = \frac{\bar{M}(k, \omega)}{\{\omega - \epsilon_k - M(k, \omega)\} \{\omega + \epsilon_k + M(-k, -\omega)\} + \bar{M}^2(k, \omega) + i\delta}$$

Le problème est alors de calculer les self énergies à petit k . Que peut-on dire sur les propriétés analytiques de $M(k, \omega)$ et $\bar{M}(k, \omega)$? Ce problème a été étudié dans le cadre de la théorie des liquides de Fermi à $T = 0$ par Amit, Kane et Wagner [2.3-5] . Ils obtiennent:

$$\text{Re } M(k, \omega) = \text{Re } M(k, \omega) \Big|_{\text{anal.}} + (\alpha_0 \omega^3 + \alpha_1 \omega^2 k + \alpha_2 \omega k^2 + \alpha_3 k^3) \cdot \ln \frac{\omega}{\omega_0} + O(\omega^4) \quad (2.3-17)$$

c'est-à-dire une partie analytique en k et ω et une partie non analytique d'ordre $\omega^3 \ln \omega$. Dans la limite $\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ la partie analytique domine et l'on peut développer en puissance de ω jusqu'au deuxième ordre. Dans le cas d'un gaz de Bose dilué en interactions faibles, Gould et Wong [2.3-7] ont montré que le spectre des excitations élémentaires est non analytique et de la forme:

$$\omega(k) = k (c_0 + c_1 k^2 + c_2 k^4 \ln k + \dots) \quad (2.3-18)$$

La non analyticité pour $k \rightarrow 0$ apparaît donc à l'ordre $k^3 \ln k$.

Nous pouvons donc présumer que les self énergies M et $\bar{M}$ ont un développement du type:

$$M(k, \omega) = M(k, \omega) \Big|_{\text{anal.}} + \omega^5 \ln \omega + \dots \quad (2.3-19)$$

Donc dans la limite isotherme $\omega \rightarrow 0$ puis $k \rightarrow 0$ (c.f. Klein et Wehner [2.3-6]), la partie analytique domine et on peut développer les self énergies en puissances de k et ω au voisinage de $(k, \omega) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} M(k, \omega) = & M(0, 0) + \frac{\partial M}{\partial \omega} \Big|_{k=\omega=0} \omega + \frac{\partial M}{\partial k} \Big|_{k=\omega=0} k + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial \omega^2} \Big|_{k=\omega=0} \omega^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial k \partial \omega} \Big|_{k=\omega=0} k\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial k^2} \Big|_{k=\omega=0} k^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3-20)$$

De même pour $\bar{M}$.

Revenons alors à l'hamiltonien (2.2-46,55). Nous constatons que pour tous les vertex qui entrent dans les self énergies, ces vertex s'annulent si une quelconque des "jambes" du vertex a une impulsion nulle. Cette propriété

découle de la présence de facteurs $\lambda_k \div k^{1/2}$ pour chaque jambe des vertex.

$$\text{Il s'en suit que: } M(0,0) = \left. \frac{\partial M}{\partial \omega} \right|_{k=\omega=0} = \left. \frac{\partial^2 M}{\partial \omega^2} \right|_{k=\omega=0} = 0 \quad (2.3-21)$$

de même pour $\bar{M}$.

Le développement (2.3-20) devient alors:

$$\begin{aligned} M(k, \omega) &= M_k k + M_{k\omega} k\omega + M_{kk} k^2 + \dots \\ \bar{M}(k, \omega) &= \bar{M}_k k + \bar{M}_{k\omega} k\omega + \bar{M}_{kk} k^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3-22)$$

avec :

$$\begin{aligned} (\bar{M})_k &= \left. \frac{\partial (\bar{M})}{\partial k} \right|_{k=\omega=0} \\ (\bar{M})_{k\omega} &= \left. \frac{\partial^2 (\bar{M})}{\partial \omega \partial k} \right|_{k=\omega=0} \quad (\bar{M})_{kk} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{M})}{\partial k^2} \right|_{k=\omega=0} \end{aligned} \quad (2.3-23)$$

Remarquons qu'un tel développement n'est exact qu'à température zéro. En effet, pour $T \neq 0$ et $\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, nous sommes dans le domaine hydrodynamique où les self énergies possèdent elles-mêmes des pôles dûs par exemple à la propagation du second son ou à la conduction de chaleur. Le rôle de ces singularités sur les diagrammes les plus simples de self énergie est discuté dans le cas du cristal diélectrique par Götze [2.3-9].

Dans l'approximation où on néglige les pôles autres que les pôles phononiques, le développement (2.3-22) sera encore applicable à $T \neq 0$.

En remplaçant M et $\bar{M}$ par leurs développements (2.3-22) dans (2.3-16), nous obtenons au plus bas ordre en k :

$$D(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega + (c_0 + M_k)k}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta} \quad (2.3-24)$$

$$\bar{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{\bar{M}_k k}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta}$$

$$\text{où: } \eta^2 = (c_0 + M_k)^2 - \bar{M}_k^2 \quad (2.3-25)$$

Retournons alors à la fonction de corrélation densité-densité. De [2.3-1, 5, 10] il suit que:

$$G_{pp}(\vec{k}, t) = N\lambda_{\vec{k}}^2 \{D_+^+(\vec{k}, t) + D_-^+(\vec{k}, t) + D_+^-(\vec{k}, t) + D_-^-(\vec{k}, t)\} \quad (2.3-26)$$

$$\text{donc: } G_{pp}(\vec{k}, \omega) = N\lambda_{\vec{k}}^2 \{D(\vec{k}, \omega) + 2\bar{D}(\vec{k}, \omega) + D(\vec{k}, -\omega)\}$$

$$= 2N\lambda_{\vec{k}}^2 \frac{\{c_0 + M_k + \bar{M}_k\}k}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta}$$

$$\text{soit } G_{pp}(k, \omega) = \frac{N}{m} \frac{k^2}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta} \left[1 + \frac{M_k + \bar{M}_k}{c_0} \right] \quad (2.3-27)$$

Pour évaluer la paranthèse de (2.3-27), faisons appel à la f-sum rule. [1-22].

En définissant le facteur de structure $S(\vec{k}, \omega)$ par:

$$S(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G_{pp}(\vec{k}, \omega) \quad , \quad \text{la f-sum rule s'écrit:}$$

$$\int_0^\infty S(\vec{k}, \omega) \omega d\omega = \frac{Nk^2}{2m} \quad (2.3-28)$$

Posons $A \equiv 1 + \frac{M_k + \overline{M}_k}{c_0}$

$$G_{pp}(\vec{k}, \omega) = \frac{AN}{2m\hbar} \left\{ \frac{k}{\omega - \hbar k + i\delta} - \frac{k}{\omega + \hbar k + i\delta} \right\}$$

comme $\frac{1}{\omega - a \pm i\delta} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega - a}\right) \mp i\pi\delta(\omega - a)$ (2.3-29)

il vient: $\text{Im } G_{pp}(\vec{k}, \omega) = -\frac{AN\pi k}{2m\hbar} \left\{ \delta(\omega - \hbar k) - \delta(\omega + \hbar k) \right\}$

d'où: $S(\vec{k}, \omega) = \frac{ANk}{2m\hbar} \left\{ \delta(\omega - \hbar k) - \delta(\omega + \hbar k) \right\}$

En remplaçant dans (2.3-28) :

$$\int_0^\infty S(\vec{k}, \omega) \omega d\omega = A \frac{Nk^2}{2m} \Rightarrow A = 1$$

Remarquons que la f-sum rule fait intervenir $S(\vec{k}, \omega)$ pour tout ω alors que la forme obtenue n'est valable que pour petits k et petits ω . Mais, si la description en termes de quasi particules est bonne, alors, pour k fixé et petit, $S(\vec{k}, \omega)$ n'aura des valeurs appréciables que pour $\omega \sim ck$ c'est-à-dire de petits ω , ce qui justifie le calcul ci-dessus. On a donc finalement:

$$\underline{G_{pp}(\vec{k}, \omega) = \frac{N}{m} \frac{k^2}{\omega^2 - \hbar^2 k^2 + i\delta}} \quad (2.3-30)$$

Nous pouvons encore définir les fonctions de corrélation

$$G_{pv^i}(\vec{k}, t) = -i \langle T \{ p_{\vec{k}}(t) v_{\vec{k}}^i(0) \} \rangle$$

$$G_{v^i v^j}(\vec{k}, t) = -i \langle T \{ v_{\vec{k}}^i(t) v_{-\vec{k}}^j(0) \} \rangle$$

(2.3-31)

En les exprimant à l'aide des D , on obtient:

$$G_{\rho\nu i}(\vec{k}, \omega) = \frac{N k^i}{2} \{ D(k, -\omega) - D(k, \omega) \} = -N \frac{\omega k^i}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta} \quad (2.3-32)$$

$$\begin{aligned} G_{\nu i \nu j}(\vec{k}, \omega) &= N \frac{k^i k^j}{4\lambda_{\vec{k}}^2} \{ D(\vec{k}, \omega) + D(\vec{k}, -\omega) - 2\bar{D}(\vec{k}, \omega) \} \\ &= Nm \frac{k^i k^j \eta^2}{\omega^2 - \eta^2 k^2 + i\delta} \end{aligned} \quad (2.3-33)$$

En regroupant (2.3-30 et 32) nous obtenons:

$$m\omega G_{\rho\rho}(\vec{k}, \omega) - \sum_i k^i G_{\rho\nu i}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (2.3-34)$$

Nous retrouvons ici le résultat de Galasiewicz [2.3-11] pour l'équation de continuité de masse exprimée en termes de fonction de corrélation.

Il nous reste à montrer que le facteur η intervenant dans (2.3-30 à 33) est bien la vitesse du son thermodynamique. Pour cela, nous allons introduire la méthode fonctionnelle. [2.3-12, 13, 14].

II.3.2. LA METHODE FONCTIONNELLE.

Nous considérons le comportement d'un système perturbé par l'intermédiaire d'un couplage à une source extérieure variable dans le temps et décrite par l'hamiltonien:

$$H_t^{\text{ext}} = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ p_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}(t) + \vec{v}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{w}_{-\mathbf{k}}(t) \right\} \quad (2.3-35)$$

u et $\vec{w}$ sont les sources extérieures.

Avec la notation:

$$p(\pm 1, \epsilon) = \begin{cases} p_{\pm \mathbf{k}_1} & \text{si } \epsilon = +1 \\ \vec{v}_{\pm \mathbf{k}_1} & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} \quad (2.3-36)$$

$$u(\pm 1, \epsilon) = \begin{cases} u_{\pm \mathbf{k}_1} & \text{si } \epsilon = +1 \\ \vec{w}_{\pm \mathbf{k}_1} & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} \quad (2.3-37)$$

et avec la convention de sommation sur les indices répétés, l'hamiltonien total du système s'écrit, compte tenu de (2.2-38) et (2.3-35) :

$$H_t = H + H_t^{\text{ext}} = E_0 + \sum_{r=2}^{\infty} h_r(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) p(\epsilon_1) \dots p(\epsilon_r) + p(\epsilon) u(\epsilon) \quad (2.3-38)$$

Soit T la température et $\beta = 1/k_B T$

Si le système est non perturbé ($u = 0$), l'énergie libre F est donnée par:

$$F = -\beta^{-1} Y \quad (2.3-39)$$

$$\text{où } Y = \ln(\text{Tr } e^{-\beta H}) \quad (2.3-40)$$

Les propriétés physiques du système sont décrites par l'ensemble des fonc-

tions de Green à n points $\{ G_n^u(1\epsilon_1, \dots, j\epsilon_j, \dots, n\epsilon_n) \}$ où:

$$G_n^u(1\epsilon_1, \dots, n\epsilon_n) = \frac{\text{Tr} \{ e^{-\beta H} \hat{T} (p(1\epsilon_1) \dots p(n\epsilon_n)) \}}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H} \}} \quad (2.3-41)$$

les opérateurs étant en représentation de Heisenberg et $\hat{T}$ étant l'opérateur chronologique pour les temps imaginaires $\tau_j : 0 \leq \tau_j \leq \beta$

Le passage de la représentation de Heisenberg à la représentation d'interaction se fait via l'opérateur d'évolution

$$S(\tau_1, \tau_2) = \hat{T} \left\{ \exp \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau H_{-i\tau}^{\text{ext}} [-i\tau] \right\} \quad (2.3-42)$$

En termes d'opérateurs en représentation d'interaction, les fonctions à n points s'écrivent:

$$G_n^u(1\epsilon_1, \dots, n\epsilon_n) = \frac{\text{Tr} \{ e^{-\beta H} \hat{T} [S(\beta, 0) p(1\epsilon_1) \dots p(n\epsilon_n)] \}}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H} S(\beta, 0) \}} \quad (2.3-43)$$

Si $u \rightarrow 0$, $\{ G_n^u \rightarrow G_n \}$ décrivant les propriétés du système non perturbé par les sources extérieures.

Définissons alors la fonctionnelle W dépendante des sources:

$$W(u) = \ln \text{Tr} \{ e^{-\beta H} S(\beta, 0) \} \quad (2.3-44)$$

et dérivons fonctionnellement W(u). Il vient:

$$\frac{\delta W(u)}{\delta u(1\epsilon_1)} = G_1^u(1\epsilon_1) = K_1^u(1\epsilon_1) \quad (2.3-45)$$

$$\frac{\delta^2 W(u)}{\delta u(1\epsilon_1) \delta u(2\epsilon_2)} = G_2^u(1\epsilon_1, 2\epsilon_2) - G_1^u(1\epsilon_1) G_1^u(2\epsilon_2) = K_2^u(1\epsilon_1, 2\epsilon_2)$$

Les fonctions K_n^u ainsi définies sont appelées les cumulants d'ordre n.

Introduisons alors une nouvelle fonctionnelle Φ dépendante des cumulants à un point et obtenue à partir de W par transformation de Legendre:

$$\Phi \{ g_1^u \} = W(u) - g_1^u(1\epsilon_1) u(1\epsilon_1) \quad (2.3-46)$$

$$\delta \Phi \{ g_1^u \} = \delta W(u) - \delta g_1^u(1\epsilon_1) u(1\epsilon_1) - g_1^u(1\epsilon_1) \delta u(1\epsilon_1)$$

mais $\delta W(u) = g_1^u(1\epsilon_1) \delta u(1\epsilon_1)$

donc $\delta \Phi \{ g_1^u \} = - \delta g_1^u(1\epsilon_1) u(1\epsilon_1) \quad (2.3-47)$

soit:
$$\frac{\delta \Phi \{ g_1^u \}}{\delta g_1^u(1\epsilon_1)} = - u(1\epsilon_1) \quad (2.3-48)$$

$$\frac{\delta^2 \Phi \{ g_1^u \}}{\delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)} = - \frac{\delta u(1\epsilon_1)}{\delta g_1^u(2\epsilon_2)} = - \left\{ \frac{\delta g_1^u(2\epsilon_2)}{\delta u(1\epsilon_1)} \right\}^{(-1)}$$

soit avec (2.3-46):

$$\frac{\delta^2 \Phi \{ g_1^u \}}{\delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)} = - K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1, 2\epsilon_2) \quad (2.3-49)$$

Supposons alors que les sources extérieures ne dépendent pas du temps. Les fonctions à un point sont statiques. On peut expliciter les dépendances temporelles de (2.3-49):

$$\delta^2 \Phi \{ g_1^u \} = - \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1, -i\tau_1; 2\epsilon_2, -i\tau_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1) \delta g_2^u(2\epsilon_2)$$

En posant $\tau = \tau_1 - \tau_2$ il vient:

$$\delta^2 \Phi \{ g_1^u \} = - \beta \int_0^\beta d\tau K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1, 2\epsilon_2; \tau) \delta g_1^u(1\epsilon_1) \delta g_2^u(2\epsilon_2)$$

$$\text{soit: } \frac{\delta^2 \Phi(g_1)}{\delta g_1^4(1\epsilon_1) \delta g_1^4(2\epsilon_2)} = -\beta K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; \omega=0) \quad (2.3-50)$$

avec la définition de la transformée de Fourier à $T \neq 0$:

$$f(\omega_n = \frac{2in}{\beta}) = \int_0^\beta d\tau f(-i\tau) e^{\omega_n \tau} \quad (2.3-51)$$

Supposons de plus que les sources extérieures créent des variations statiques à grandes longueurs d'onde dans le système. Alors (2.3-50) implique que:

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(g_1)}{\delta g_1^4(1\epsilon_1) \delta g_1^4(2\epsilon_2)} = K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; \omega=0) \quad (2.3-52)$$

où $\tilde{F} = -\Phi/\beta \xrightarrow{u \rightarrow 0} F$ = énergie libre du système.

Nous faisons alors l'hypothèse que dans la limite des grandes longueurs d'onde on a :

$$\lim_{k_i \rightarrow 0} \frac{\delta^2 \tilde{F}\{g_1\}}{\delta g_1^4(k_1; \epsilon_1=1) \delta g_2^4(k_2; \epsilon_2=1)} \rightarrow \left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right)_T \quad (2.3-53)$$

Cette hypothèse qui est essentielle pour ce qui suit ne peut pas être démontrée rigoureusement. Sa seule justification est qu'elle est physiquement satisfaisante et qu'elle conduit à des résultats convenables.

D'autre part, dans la limite $u = 0$, l'inversion de la matrice $K_2^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2)$ et les résultats (2.3-30, 32.33) nous donnent:

$$\lim_{k \rightarrow 0} K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1=1; 2\epsilon_2=1; 0) = \frac{m}{N} \eta^2 = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right)_T \quad (2.3-54)$$

II.3.3. GRANDEURS THERMODYNAMIQUES.

Calculons thermodynamiquement $\left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right)_T$

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right)_{\Omega, T} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta N^2} \right)_{\Omega, T} = \frac{\delta}{\delta N} \left(\frac{\delta F}{\delta N} \right)_{\Omega, T} = \left(\frac{\delta \mu}{\delta N} \right)_{\Omega, T} \quad (2.3-55)$$

où μ est le potentiel chimique des particules.

D'autre part, on a la relation thermodynamique [2.3-15] :

$$N \delta \mu = \Omega \delta p - S \delta T \quad (2.3-56)$$

soit à $T = \text{constante}$:

$$\frac{\Omega}{N} \left(\frac{\delta p}{\delta N} \right)_{\Omega, T} = \left(\frac{\delta \mu}{\delta N} \right)_{\Omega, T}$$

D'autre part, la vitesse du son adiabatique est donnée par [2.3-16] :

$$c^2 = \frac{\Omega}{m} \left(\frac{\delta p}{\delta N} \right)_{N=N_0} \quad (2.3-57)$$

A $T = 0$, les vitesses du son adiabatique et isotherme sont égales, donc:

$$c^2 = \frac{N}{m} \left(\frac{\delta \mu}{\delta N} \right)_{\Omega, T} = \frac{N}{m} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right)_{\Omega, T} \quad (2.3-58)$$

En retournant à (2.3-54), nous obtenons alors que $\eta^2 = c^2$ (2.3-59)

Nous obtenons donc finalement le résultat suivant: à température zéro et dans la limite des grandes longueurs d'onde, les excitations élémentaires dans l'hélium liquide sont des phonons se propageant à la vitesse "macroscopique" du son c .

Nous retrouvons ainsi de manière relativement simple le résultat de Gavoret et Nozières [1-21]. Il est à remarquer que la dérivation de ce résultat ne fait pas intervenir les détails du modèle choisi. Il repose essentiellement sur la possibilité de décrire le système en termes de variables collectives.

Ce résultat s'applique aussi bien au cas où le champ de vitesse est irrotationnel ou rotationnel. Cela signifie que dans la limite des grandes longueurs d'onde, la vitesse du son n'est pas affectée par la présence de vortex.

Dans l'approximation où l'on néglige les pôles autres que les pôles phononiques, ce résultat est encore valable à température non nulle.

Nous voyons donc que la vitesse qu'il faut introduire dans l'hamiltonien de Landau est la "vraie" vitesse du son c . Cette grandeur étant déjà "renormalisée" il n'y a pas de sens de faire des calculs de renormalisation de la vitesse du son à partir du modèle de Landau.

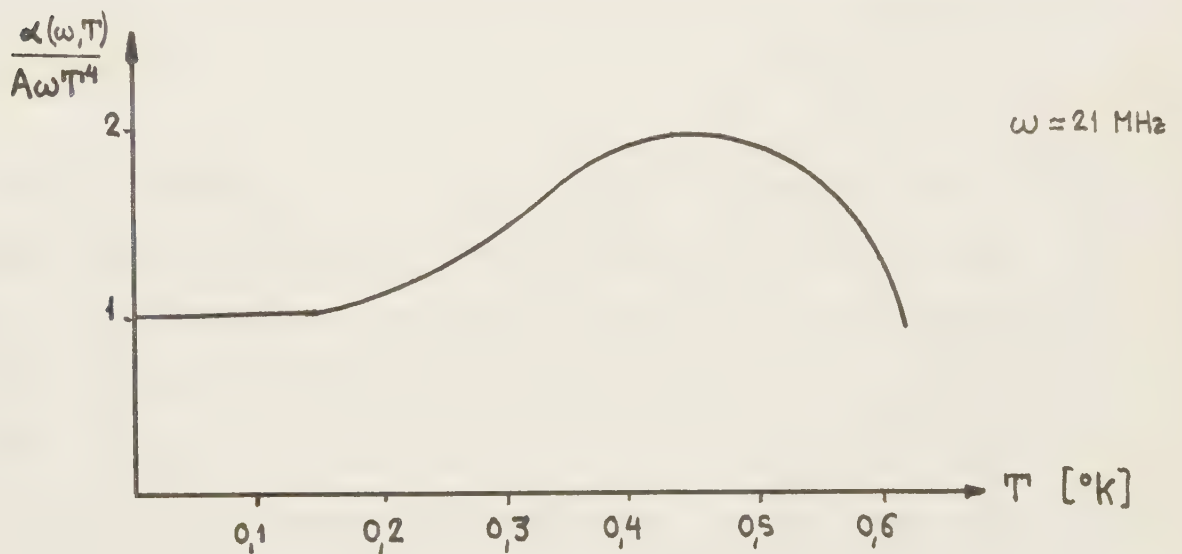
CHAPITRE III

Atténuation ultrasonore

à basse température

III. 1. INTRODUCTION.

L'atténuation ultrasonore dans l'hélium liquide a donné lieu depuis 1955 à de nombreux travaux expérimentaux [3.1-1,2,3,4,5,6]. La pulsation $\omega = 2\pi\nu$ des ondes sonores varie entre 12 MHz et 205 MHz, alors que le domaine de température varie entre 0,1°K et plusieurs degrés Kelvin. Les phonons ultrasonores ont donc un caractère subthermique: $\hbar\omega \ll k_B T$ (3.1-1). Pour $T < 0,2^\circ K$, on obtient qualitativement un comportement en ωT^4 alors que l'on observe un renflement pour les températures plus élevées.



Théoriquement le facteur d'atténuation $\alpha(\omega, T)$ peut être obtenu par différentes approches:

i) A partir d'une description microscopique en termes d'atomes d'hélium.

Une telle approche est développée par S. Ma, H. Gould et V.K. Wong [3.1-7] et C.E. Carroll [3.1-8], donne une dépendance en ωT^4 .

ii) A partir du modèle hydrodynamique de Landau.

Pour $T < 0,6^\circ\text{K}$, l'hélium est décrit comme un gaz de phonons en interactions. Les ondes ultrasonores étant de longueur d'onde beaucoup plus grande que celle des phonons thermiques, l'onde sonore peut être traitée comme une perturbation de grande longueur d'onde agissant sur le système. On peut alors écrire une équation de Boltzmann phénoménologique pour les phonons [3.1-9]. L'atténuation ultrasonore dépend essentiellement des processus que l'on considère dans l'intégrale de collision. Dans le même formalisme, C.P. Enz a étudié l'influence des modes collectifs phononiques possibles, modes collectifs découlant de la présence d'un terme de Vlasov dans l'équation de Boltzmann en régime sans collisions [3.1-10].

Une autre manière d'obtenir l'atténuation ultrasonore à partir du modèle hydrodynamique de Landau est de calculer la self énergie phononique résultant des interactions phonon-phonon. L'atténuation est directement reliée à la partie imaginaire de la self énergie. Dans le domaine sans collisions ($\Gamma_{th} \ll \hbar\omega \ll k_B T$, Γ_{th} = largeur de raie d'un phonon thermique) et dans l'approximation de la conservation du nombre de phonons, Pethick et Ter Haar [3.1-11] ont calculé les contributions des divers diagrammes de la self énergie à l'atténuation. Ils retrouvent le résultat en ωT^4 au plus bas ordre en ω et T . La question de savoir si l'approximation du régime sans collisions est valable dans le domaine de fréquences et de températures investiguées jusqu'ici a été étudiée par C.P. Enz [3.1-12]. Il en ressort que le domaine d'expérience est à cheval entre les régions "hydrodynamiques" et "sans collisions" et que les résultats obtenus dans l'approximation du régime sans collisions doivent être

appliqués avec prudence.

Le but que nous nous proposons dans ce chapitre est de démontrer que le résultat de Pethick et Ter Haar pour l'atténuation, au plus bas ordre en ω et T peut être obtenu sous certaines hypothèses à partir de notre description en termes de variables collectives à tous les ordres dans l'interaction, sans faire d'approximation sur la conservation de nombre de phonons.

III.2. COEFFICIENT D'ATTENUATION ULTRASONORE.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment le coefficient d'atténuation ultrasonore est relié à la partie imaginaire de la fonction de corrélation densité-densité. Une façon simple de créer des ondes sonores dans un liquide est de coupler le système avec une source créant des fluctuations de densité en un point du système. Un tel couplage est décrit par l'hamiltonien:

$$H'_t = - \int d^3 \vec{x}' s(\vec{x}', t) \rho(\vec{x}') = - \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}} s(\vec{k}, t) \rho(-\vec{k}) \quad (3.2-1)$$

Plaçons la source à l'origine et vibrant à la fréquence ν .

$$s(\vec{x}, t) = s \delta(\vec{x}) e^{i\nu t} \quad (3.2-2)$$

$$\text{soit } s(\vec{k}, t) = s e^{i\nu t}$$

En regardant la propagation des fluctuations de densité dans l'espace et le temps, nous pourons définir le coefficient d'atténuation. Calculons $\delta \langle \rho(\vec{x}) \rangle_s(t)$ dans l'approximation de la réponse linéaire [2.3-14, §5,2].

Nous obtenons:

$$\delta \langle \rho(\vec{x}) \rangle_s(t) = - \frac{s}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\nu t'} G_{\rho\rho}^{\text{ret}}(\vec{k}, t-t') \quad (3.2-3)$$

où $G_{\rho\rho}^{\text{ret}}$ est la fonction réponse ou fonction de Green retardée densité-densité, définie par:

$$G_{\rho\rho}^{\text{ret}}(\vec{k}, t) = -i\theta(t) \langle [\rho_{\vec{k}}(t) \rho_{-\vec{k}}(0)]_- \rangle \quad (3.2-4)$$

D'autre part, nous savons que la fonction de Green retardée à temps réels est reliée à la fonction de Green chronologique à temps imaginaires par [2.3-13, §3.2] :

$$G_{pp}(\vec{k}, z) = G_{pp}^{\text{ret}}(\vec{k}, z), \quad \text{Im } z > 0 \quad (3.2-5)$$

$G_{pp}^{\text{ret}}(\vec{k}, z)$ est le prolongement analytique dans le demi-plan supérieur des fréquences de $G_{pp}^{\text{ret}}(\vec{k}, \omega)$ et $G_{pp}(\vec{k}, z)$ la fonction de Green chronologique densité-densité à temps imaginaires. (3.2-3) donne alors:

$$\begin{aligned} \delta \langle p_k \rangle_s(t) &= - \frac{s}{2\pi\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} G_{pp}(\vec{k}, \omega + i\delta) e^{i\omega t'} \\ &= - \frac{s}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{2\pi} e^{it'(\nu - \omega)} G_{pp}(\vec{k}, \omega + i\delta) \\ &= - \frac{s}{\Omega} e^{i\nu t} G_{pp}(\vec{k}, \nu + i\delta) \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

En passant en transformée de Fourier:

$$\delta \langle p(\vec{x}) \rangle_s(t) = - \frac{s}{\Omega^2} e^{i\nu t} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} G_{pp}(\vec{k}, \nu + i\delta) \quad (3.2-7)$$

Compte tenu de la forme de $G_{pp}(\vec{k}, \nu)$ et de la correspondance entre fonctions de Green à temps réels et imaginaires, écrivons:

$$G_{pp}(\vec{k}, z) = \frac{N}{m} \frac{k^2}{z^2 - \Omega_k^2 - \Omega_k^0 \pi(k, z)} \quad (3.2-8)$$

En supposant que le problème puisse être décrit en termes de quasi particules, nous pouvons écrire :

$$G_{pp}(\vec{k}, z) = \frac{N}{m} \frac{k^2}{\{z - \Omega_k + i\Gamma_k\} \{z + \Omega_k + i\Gamma_k\}} \quad (3.2-9)$$

$$\text{où } \Omega_k = \Omega_k^0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Pi(\vec{k}, \pm(\Omega_k - i\Gamma_k)) = \bar{c}k$$

$$\Gamma_k = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \Pi(\vec{k}, \pm(\Omega_k - i\Gamma_k))$$

$$\delta\langle\rho(\vec{x})\rangle_s(t) = -\frac{SN}{m\Omega^2} e^{i\omega t} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{k^2}{\{\nu - \Omega_k + i\Gamma_k\} \{\nu + \Omega_k + i\Gamma_k\}} \quad (3.2-10)$$

en passant de la somme à l'intégrale:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \quad \text{il vient :}$$

$$\delta\langle\rho(\vec{x})\rangle_s(t) = -\frac{SN}{m\Omega^2} \frac{e^{i\omega t}}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{k^2}{\{\nu - \Omega_k + i\Gamma_k\} \{\nu + \Omega_k + i\Gamma_k\}}$$

en supposant encore $\Gamma_k \simeq \Gamma$ (indépendant de k), on peut intégrer par la méthode des résidus dans le plan complexe k et l'on obtient:

$$\delta\langle\rho(\vec{x})\rangle_s(t) \simeq \sum_x f(\nu, \Gamma) \frac{e^{i(\nu t - \nu x/\bar{c})}}{x} e^{-\Gamma x/\bar{c}} \quad (3.2-11)$$

où $f(\nu, \Gamma)$ est une fonction régulière indépendante de x . On obtient donc une fluctuation de densité, en forme d'onde sphérique amortie, de facteur d'amortissement:

$$\alpha = \frac{\Gamma}{\bar{c}} = -\frac{1}{2\bar{c}} \operatorname{Im} \Pi(\vec{k}, \bar{c}k + i\delta) \quad (3.2-12)$$

III.3. PROPRIETES ANALYTIQUES ET PARTIE IMAGINAIRE DE LA SELF ENERGIE.

Pour obtenir l'atténuation, nous devons calculer la partie imaginaire de la self énergie de la fonction de corrélation densité-densité. Nous sommes intéressés aux termes de plus bas ordre en ω et T . Nous savons que $G_{pp}(k, z)$ est une fonction analytique en z hors de l'axe réel. Il en est de même pour la self énergie $\pi(k, z)$. La partie imaginaire de $\pi(k, z)$ nous sera donnée par la discontinuité de π sur l'axe réel.

C'est Landau qui le premier a étudié les propriétés analytiques d'un diagramme de Feynman, dans le cadre de la théorie des champs [3.3-1]. Il a formulé les conditions nécessaires pour obtenir les singularités d'un diagramme. Ces conditions, connues sous le nom de conditions de Landau, sont au nombre de deux :

- i) A chaque singularité correspond un "diagramme réduit" obtenu en réduisant un sous ensemble de propagateurs intérieurs du diagramme en un point.
- ii) Les particules intermédiaires du diagramme réduit doivent être réelles (sur la couche de masse).

Dans le cadre du problème à N corps, il apparaît d'emblée deux différences importantes avec la théorie des champs :

- i) Il n'y a pas en général de principe de symétrie dans le problème jouant un rôle équivalent à l'invariance de Lorentz (l'invariance de Galilée n'est même pas présente pour un problème avec bords). Il faut donc

séparer les variables d'énergie et d'impulsion. On ne considérera que des prolongements analytiques dans les variables d'énergie.

ii) Les particules qui interviennent sont en fait des quasi particules ayant une durée de vie finie.

L.S. Langer [3.3-2] a étudié les propriétés analytiques des diagrammes de Feynman à $T=0$ pour un gaz d'électrons en interactions. Il montre que les singularités d'un diagramme de Feynman donné peuvent encore être caractérisées par deux conditions similaires à celles de Landau et que nous appellerons conditions de Landau-Langer.:

i) A chaque singularité correspond un diagramme réduit tel que si l'on coupe les propagateurs de l'état intermédiaire le diagramme est séparé en deux parties connexes, chacune contenant au moins un vertex.

ii) Les énergies des propagateurs de l'état intermédiaire (qui sont déterminées par une équation algébrique) peuvent être soit positive (propagation d'un électron), soit négative (propagation d'un trou).

La discontinuité de l'amplitude d'un diagramme de Feynman donné s'obtient en sommant tous les graphes réduits permis par les conditions de Landau-Langer. A chaque propagateur on associera une représentation spectrale différente si l'on a affaire à un électron ou à un trou.

La distinction entre ligne d'électron et de trou conduit tout naturellement à travailler dans la représentation de Goldstone [3.3-4,5,6,7].

Langer a généralisé cette théorie à température finie [3.3-8]. Une nouvelle difficulté vient du fait que l'on travaille avec des fonctions de Green à temps imaginaires. La transformée de Fourier n'est alors définie qu'en une suite discrète de points et la construction d'une fonction analytique, dans tout le plan des fréquences moins l'axe réel, par prolongement analytique demande certaines précautions.

Pourtant les conditions de Landau-Langer sont encore valables. La condition ii), déterminant les énergies permises des propagateurs de l'état intermédiaire fait alors intervenir la distribution de Fermi. Le calcul de la discontinuité de l'amplitude d'un diagramme donné est similaire à celui pour $T=0$.

D'autre part, I.E. Dzyaloshinskii [3.3-9], puis G.M. Eliasberg [3.3-10] ont également étudié les propriétés des diagrammes de Feynman à $T \neq 0$ pour un liquide de Fermi. Ils montrent que l'amplitude F_G associée à un diagramme de Feynman G donné se décompose en une somme d'amplitudes F_{jG} . Chaque F_{jG} contient un dénominateur d'énergie qui détermine les singularités de F_G . D'autre part, chaque F_{jG} peut être associée directement à un diagramme de Goldstone [3.3-9,11].

De manière plus générale, R.Balian, C. De Dominicis [3.3-12] puis G. Baym et A.M. Sessler [3.3-13] ont développé un formalisme permettant de calculer la self énergie d'un système de bosons ou de fermions. Les règles édictées et énoncées ci-dessous dans le cas des bosons sont totalement équivalentes à la théorie de perturbation habituelle [3.3-13]. Elles font appel à la représentation de Goldstone.

En représentation de Goldstone, la contribution de $n^{\text{ième}}$ ordre dans l'interaction V à la self énergie irréductible $\pi^{(n)}(t_1, t_2, \vec{p})$ s'obtient de la manière suivante:

- i) Introduire une échelle des temps et placer les n interactions V à des temps différents $t'_1 < t'_2 < t'_3 \dots < t'_n$. Relier les points d'attache des interactions entre eux par des propagateurs marqués (c.à.d. indiquant la direction de propagation dans le temps) en prenant garde à ce qu'une ligne de propagateur entre dans le diagramme en t'_1 et qu'une autre sorte du diagramme en t'_n . (il est permis de refermer une ligne de propagateur sur la même interaction).
- ii) Attribuer une impulsion $\vec{p}_i$ à chaque ligne intérieure et $\vec{p}$ aux lignes extérieures.
- iii) Ecrire tous les diagrammes connexes, irréductibles et topologiquement inéquivalents au sens de Goldstone.

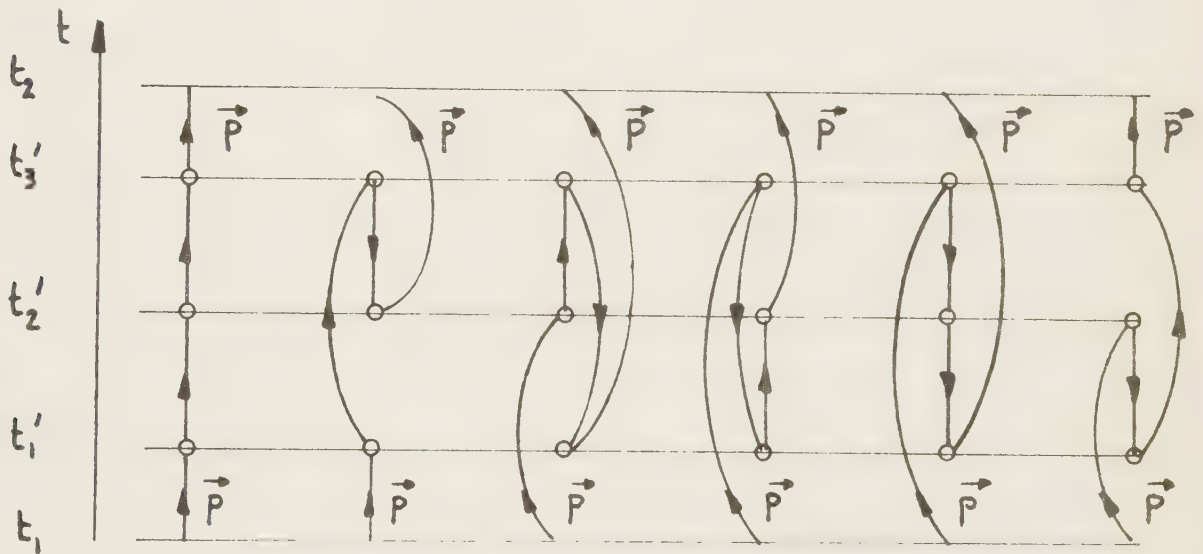
Définitions:

- 1) Un diagramme de Goldstone est irréductible s'il ne peut pas être partagé en deux parties en coupant une ligne de propagateur.
- 2) Deux diagrammes sont dits topologiquement équivalents au sens de Goldstone si l'on peut passer de l'un à l'autre par déformation sans changer l'ordre chronologique des interactions.

La différence essentielle entre un diagramme de Goldstone (ou diagramme marqué) et un diagramme de Feynman (ou diagramme muet) est que le diagramme de Goldstone est ordonné dans le temps. Les flèches dans un diagramme de Feynman ne désignent que la direction de l'impulsion sans préciser le sens de parcours dans le temps. Pour un diagramme de Feynman donné, il correspond $n!$ diagrammes de Goldstone correspondant aux $n!$ manières d'arranger les n interactions dans le temps.

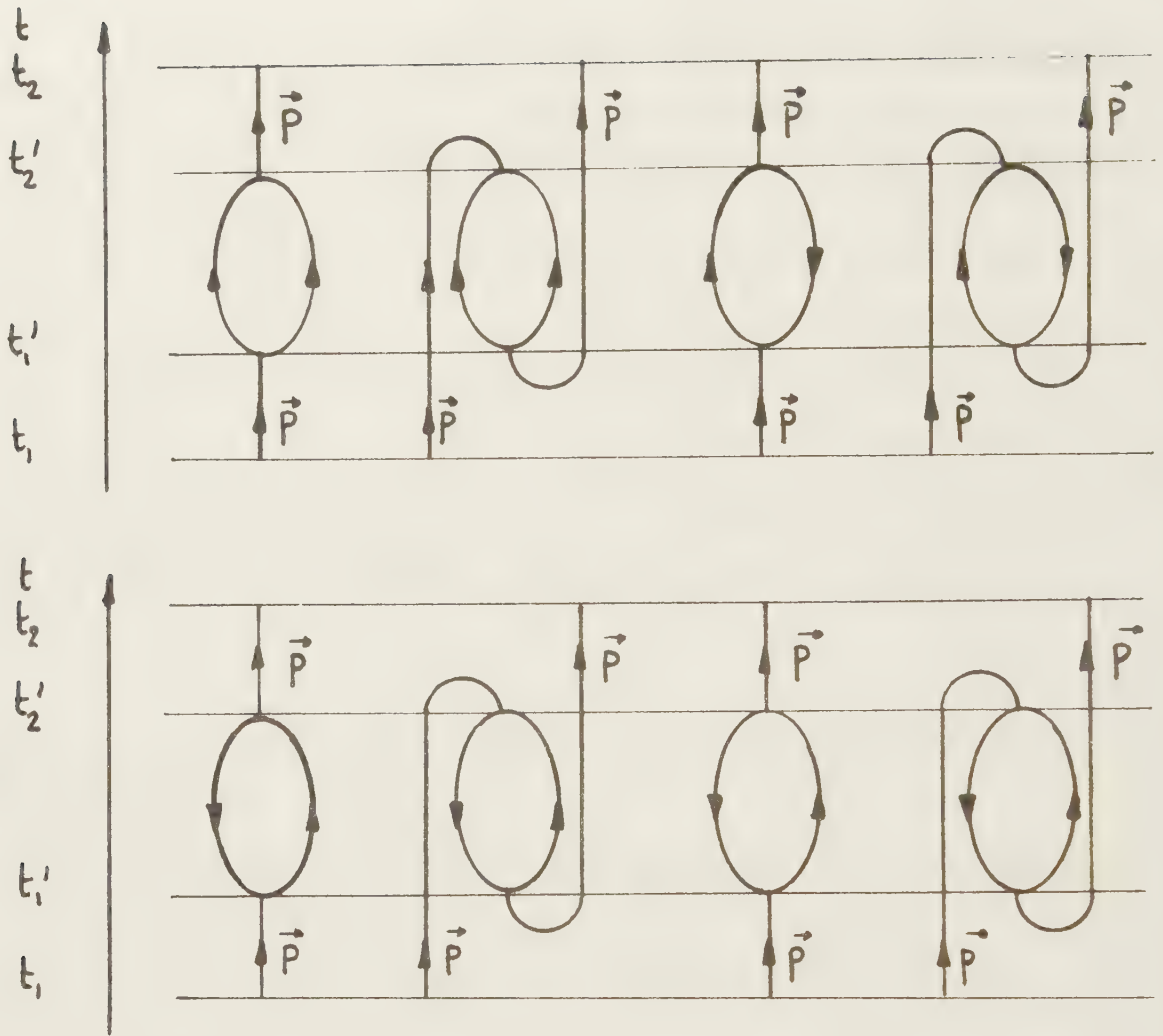
Donnons deux exemples:

a) Cas d'un potentiel extérieur : les diagrammes de Goldstone au 3^e ordre sont: $\phi = V$



On a 6 termes possibles, ces diagrammes sont réductibles.

b) Interaction à trois points au 2^e ordre: il y a $4 \cdot 2!$ diagrammes possibles:



Nous donnons ci-dessous les règles permettant le calcul de $\pi(\vec{p}, z)$ dans le cas bosonique.

La contribution du n^{eme} ordre dans l'interaction, $\pi^{(n)}(\vec{p}, z)$ est obtenue de la manière suivante:

- i) Dessiner tous les diagrammes de Goldstone contribuant à l'ordre n .
- ii) A chaque ligne interne d'impulsion $\vec{p}_i$ dirigée vers le haut, attribuer le facteur $A(\vec{p}_i; \omega_i) \{ 1 + f(\omega_i) \}$

A chaque ligne d'impulsion $\vec{p}_i$ dirigée vers le bas, attribuer le facteur

$$A(\vec{p}_i, \omega_i) f(\omega_i) \quad \text{où:}$$

$A(\vec{p}_i, \omega_i) = -2 \operatorname{Im} G(\vec{p}_i, \omega_i + i\epsilon)$ est la fonction spectrale du propagateur et $f(\omega_i) = \{e^{\beta\omega_i} - 1\}^{-1}$ la fonction de Bose.

iii) A toute interaction, associer le facteur $V(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots)$ en explicitant la conservation d'impulsion aux vertex à l'aide de fonctions δ .

iv) Dessiner les $(n-1)$ coupures possibles entre les n interactions chronologiquement ordonnées et associer à chaque coupure le facteur:

$$C = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}$$

A_1 associe un facteur $-(\omega_i + \mu)$ à toute ligne montante.

A_2 associe un facteur $+(\omega_i + \mu)$ à toute ligne descendante.

A_3 associe un facteur:

z si les deux lignes extérieures ne traversent pas la coupure.

$-z$ si les deux lignes extérieures traversent la coupure.

0 si seulement une ligne extérieure traverse la coupure.

(μ = potentiel chimique)

v) Faire le produit des facteurs ii) à iv) et intégrer sur toutes les impulsions intérieures $\vec{p}_i$ (avec un facteur $(2\pi)^{-3}$ pour chaque intégrale tridimensionnelle) et sur les fréquences intérieures ω_i (avec un facteur $(2\pi)^{-1}$ pour chaque intégrale).

On vérifie que les coupures conduisant à des singularités sont celles qui

séparent le diagramme en deux parties connexes, chacune contenant au moins un vertex. Si l'état intermédiaire contenait n propogateurs, nous pouvons regrouper chacune des deux parties "coupées" en un vertex à $n+1$ points. On retrouve bien la notion de diagramme réduit de Landau -Langer.

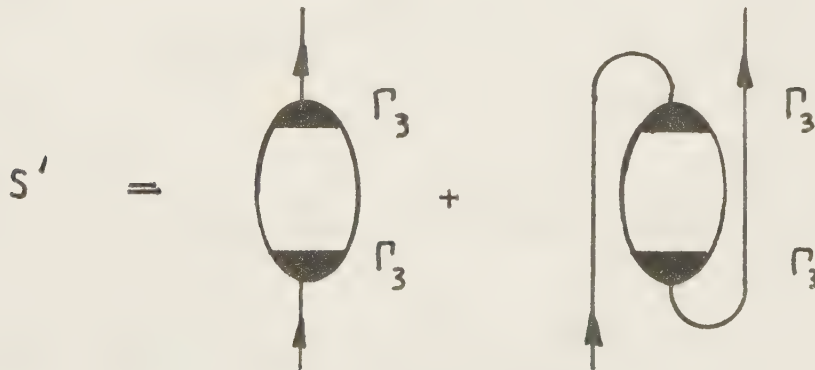
Le point important pour le calcul de la partie imaginaire de la self énergie est que les dénominateurs d'énergie donneront lieu, eu égard à (2.3-29) à des fonctions δ pour les variables d'énergie. La présence simultanée de fonctions de Bose et de fonctions δ dans l'expression de la partie imaginaire de la self énergie limite fortement l'espace de phase et restreint les intégrations aux petites fréquences.

Il se pose la question de savoir quels sont les diagrammes réduits qui contribuent au plus bas ordre en ω et T à la partie imaginaire de $\Pi(R, z)$, ceci dans la limite $\omega \rightarrow 0, T \rightarrow 0$. Dans le cas d'un gaz de fermions, Langer [3.3-8] a montré que pour $T = 0$, tout graphe réduit dont l'état intermédiaire contient n trous et $n+1$ particules donne une contribution $\sim \omega^{2n}$. Ce sont donc les diagrammes réduits avec une ligne de trou et deux de particules qui donneront la contribution de plus bas ordre en ω^2 . A $T \neq 0$, ces mêmes diagrammes donnent des contributions du type $(\omega^2 + \alpha T^2)$, alors que les diagrammes avec $n = 2$ (2trous et 3particules) donnent une contribution $\sim \omega^2 T^2$ [3.3-13].

Dans le cas des phonons, des calculs effectués à l'aide du modèle hydrodynamique de Landau par Pethick et Ter Haar donnent des contributions du type [3.1-11] $\omega^r T^s$ avec $r + s = 5$ pour les graphes réduits dont

l'état intermédiaire comprend deux phonons et $r + s = 9$ pour ceux dont l'état intermédiaire comprend trois phonons. Il semble donc que $r + s = 4n - 3$ si n est le nombre de quasiparticules dans l'état intermédiaire. Nous en concluons que la contribution au plus bas ordre en ω et T sera donnée par les graphes réduits dont l'état intermédiaire comporte deux lignes.

Considérons alors un graphe de self énergie d'ordre n , $\Pi_j^{(n)}$. Extrayons de ce graphe tous les diagrammes réduits ayant deux propagateurs intermédiaires. Faisons ceci pour tous les graphes $\Pi_j^{(n)}$ figurant dans la self énergie. Appelons S l'ensemble de tous les diagrammes réduits ainsi obtenus. Soit S' la famille des diagrammes inclus dans les deux diagrammes de Goldstone ci-dessous, construits à l'aide des deux trivertex effectifs Γ_3 et de deux propagateurs:



Par inspection des diagrammes contenus dans S et S' , on remarque que tout diagramme de S figure dans S' et vice-versa. Le fait d'être en représentation de Goldstone nous assure que les diverses contributions de S' ne sont comptées qu'une seule fois.

Si nous connaissons les trivertex Γ_3 , nous pouvons alors calculer, au plus bas ordre en ω et T , la partie imaginaire de la self énergie, c'est-à-dire, l'atténuation à tous les ordres de perturbation.

III.4. CALCUL DU TRIVERTEX.

Notre but est de calculer à l'aide de la méthode fonctionnelle les différents trivertex intervenant dans la self-énergie $\Pi(K, \omega)$.

Revenons au §2.3, de (2.3-46), nous avons:

$$\frac{\delta^2 W(u)}{\delta u(1\epsilon_1) \delta u(2\epsilon_2)} = K_2^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2) \quad (3.4-1)$$

$$\frac{\delta^3 W(u)}{\delta u(1\epsilon_1) \delta u(2\epsilon_2) \delta u(3\epsilon_3)} = K_3^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3) \quad (3.4-2)$$

Après la transformation de Legendre éliminant les sources extérieures au profit des cumulants à un point, nous avons (c.f (2.3-49)) :

$$\frac{\delta^2 \Phi\{g^u\}}{\delta g_1^u(1\epsilon_1) \delta g_1^u(2\epsilon_2)} = - K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1; 2\epsilon_2) \quad (3.4-3)$$

$$\frac{\delta^3 \Phi\{g^u\}}{\delta g_1^u(1\epsilon_1) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(3\epsilon_3)} = - \frac{\delta}{\delta g_1^u(3\epsilon_3)} K_2^{u(-1)}(1\epsilon_1; 2\epsilon_2)$$

$$= K_2^u(1\epsilon_1; \bar{1}\bar{\epsilon}_1) \frac{\delta K_2^u(\bar{1}\bar{\epsilon}_1, \bar{2}\bar{\epsilon}_2)}{\delta g_1^u(3\epsilon_3)} K_2^u(\bar{2}\bar{\epsilon}_2; 2\epsilon_2) \quad (3.4-4)$$

mais d'après (3.4-1) :

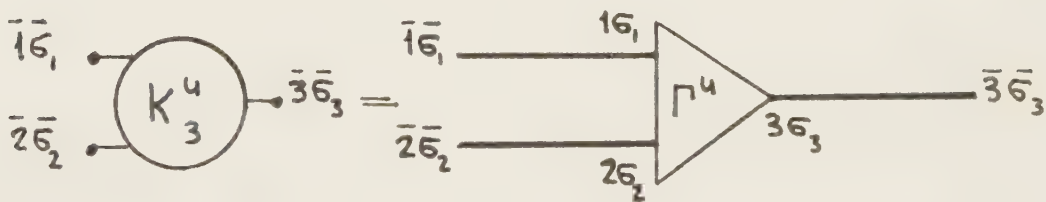
$$\begin{aligned} \frac{\delta K_2^u(\bar{1}\bar{\epsilon}_1, \bar{2}\bar{\epsilon}_2)}{\delta g_1^u(3\epsilon_3)} &= \frac{\delta K_2^u(\bar{1}\bar{\epsilon}_1, \bar{2}\bar{\epsilon}_2)}{\delta u(\bar{3}\bar{\epsilon}_3)} \cdot \frac{\delta u(\bar{3}\bar{\epsilon}_3)}{\delta g_1^u(3\epsilon_3)} \\ &= \frac{K_3^u(\bar{1}\bar{\epsilon}_1, \bar{2}\bar{\epsilon}_2, \bar{3}\bar{\epsilon}_3)}{K_2^u(\bar{3}\bar{\epsilon}_3, \bar{3}\bar{\epsilon}_3)} \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

d'où (3.3-4) devient:

$$\begin{aligned}
 K_3^u(\bar{1}\bar{6}_1; \bar{2}\bar{6}_2; \bar{3}\bar{6}_3) &= \frac{\delta^3 \Phi(g_1^u)}{\delta g_1^u(3\epsilon_3) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)} \cdot \\
 &\quad \cdot K_2^u(1\epsilon_1; \bar{1}\bar{6}_1) K_2^u(2\epsilon_2; \bar{2}\bar{6}_2) K_2^u(3\epsilon_3; \bar{3}\bar{6}_3) \\
 &= \Gamma^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3) K_2^u(1\epsilon_1; \bar{1}\bar{6}_1) K_2^u(2\epsilon_2; \bar{2}\bar{6}_2) K_2^u(3\epsilon_3; \bar{3}\bar{6}_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.4-6}$$

où Γ^u est le trivertex effectif.

Diagrammatiquement, nous avons:



$$\text{et : } \Gamma^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3) = \frac{\delta^3 \Phi(g_1^u)}{\delta g_1^u(3\epsilon_3) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)}$$

(3.4-7)

En explicitant la dépendance temporelle, il vient:

$$\begin{aligned}
 \delta^3 \Phi\{g_1^u\} &= \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \Gamma^u(1\epsilon_1\tau_1; 2\epsilon_2\tau_2; 3\epsilon_3\tau_3) \cdot \\
 &\quad \cdot \delta g_1^u(1\epsilon_1\tau_1) \delta g_1^u(2\epsilon_2\tau_2) \delta g_1^u(3\epsilon_3\tau_3)
 \end{aligned}$$

En supposant que les sources extérieures ne dépendent pas du temps, les fonctions à un point seront statiques. D'autre part, par invariance aux translations dans le temps, posons:

$$\Gamma^u(1\epsilon_1, \tau_1; 2\epsilon_2, \tau_2; 3\epsilon_3, \tau_3) = \Gamma^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3; \tau; \bar{\tau})$$

il vient alors:

$$\delta^3 \phi \{g_1^u\} = \beta \int_0^\beta d\tau d\bar{\tau} \Gamma^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3; \tau; \bar{\tau}) \cdot \delta g_1^u(1\epsilon_1) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(3\epsilon_3)$$

Avec la définition de la transformée de Fourier:

$$f\left(\omega_n = \frac{2in}{\beta}; \omega_{n'} = \frac{2in'}{\beta}\right) = \int_0^\beta d\tau d\bar{\tau} e^{(\omega_n \tau + \omega_{n'} \bar{\tau})} f(\tau, \bar{\tau}) \quad (3.4-8)$$

et compte tenu de la définition (2.3-52), il vient:

$$\Gamma^u(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3; \omega_n = \omega_{n'} = 0) = - \frac{\delta^3 \tilde{F}\{g_1^u\}}{\delta g_1^u(3\epsilon_3) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)} \quad (3.4-9)$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse faite au § 2.3 sur le comportement aux grandes longueurs d'onde:

$$\frac{\delta^3 \tilde{F}\{g_1^u\}}{\delta g_1^u(3\epsilon_3) \delta g_1^u(2\epsilon_2) \delta g_1^u(1\epsilon_1)} \xrightarrow{k_{1,2,3} \rightarrow 0} \frac{\delta^3 F}{\delta \rho_0(\epsilon_1) \delta \rho_0(\epsilon_2) \delta \rho_0(\epsilon_3)} \quad (3.4-10)$$

Nous obtenons, dans la limite isotherme:

$$\lim_{k_{1,2,3} \rightarrow 0} \Gamma(1\epsilon_1; 2\epsilon_2; 3\epsilon_3) = - \frac{\delta^3 F}{\delta \rho_0(\epsilon_1) \delta \rho_0(\epsilon_2) \delta \rho_0(\epsilon_3)}$$

où F est l'énergie libre du système.

(3.4-11)

(3.4-11) est valable à $\omega = 0$ mais $T \neq 0$, ce qui assure que l'on se trouve dans le domaine hydrodynamique.

Calculons explicitement ces trivertex dans les limites indiquées et à $T = 0$.

Seuls deux trivertex sont non nuls:

$$\Gamma_{ppp} = - \frac{\delta^3 F}{\delta p_0^3} = - \frac{d}{dp_0} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right) \quad (3.4-12)$$

$$\text{Mais (2.3-58)} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\delta^2 F}{\delta p_0^2} \right) = \frac{mc^2}{p_0}$$

$$- \frac{d}{dp_0} \left(\frac{mc^2}{p_0} \right) = - \left\{ \frac{2mc}{p_0} \frac{dp_0}{dp_0} - \frac{mc^2}{p_0^2} \right\}$$

En introduisant la constante de Grüneisen u , définie par:

$$u = \frac{p_0}{c} \left(\frac{dc}{dp_0} \right)_T \quad (3.4-13)$$

il vient:

$$\underline{\Gamma_{ppp} = - \frac{mc^2}{p_0^2} (2u - 1)} \quad (3.4-14)$$

L'autre trivertex non nul est Γ_{puv} . Pour obtenir sa valeur, il suffit de se rappeler que pour $T = 0$, l'énergie interne E est égale à l'énergie libre du système ($F = E - TS$). D'autre part, si l'on admet que le système est invariant de Galilée, on peut écrire:

$$F(p, \vec{v}) = F(p) + \frac{1}{2} \frac{p_0 m}{\Omega} \vec{v}^2$$

$$\text{d'où:} \quad \underline{- \Gamma_{puv} = \frac{m}{\Omega} = \frac{\delta^3 F}{\delta p_0 \delta \vec{v}^2}} \quad (3.4-15)$$

Nous avons donc obtenu nos deux trivertex à $T = 0$ dans la limite isotherme ($\omega \rightarrow 0$, puis $k \rightarrow 0$). Il est à remarquer que ces résultats sont à nouveau indépendants des détails du modèle choisi et ne sont liés qu'à la possibilité d'une description en termes de variables collectives.

Pour $T \neq 0$, il est clair que ces trivertex posséderont des singularités liées à la possibilité d'existence de nouvelles excitations dans le système, telle par exemple le second son.

Le résultat obtenu n'est donc exact qu'à $T = 0$. Il reste néanmoins valide à $T \neq 0$ dans l'approximation où l'on néglige les pôles autres que phononiques.

III.5. CALCUL DE L'ATTENUATION ULTRASONORE.

Nous pouvons donc en principe calculer la partie imaginaire du propagateur $G_{pp}(\vec{k}, \omega)$ en considérant les diagrammes en bulle formés de deux tri-vertex reliés par des propagateurs. Il faut alors remarquer que les propagateurs figurant dans les diagrammes de self énergie ayant deux points d'attache de type p peuvent être des propagateurs G_{pp} , $G_{p\vec{v}}$ ou $G_{\vec{v}\vec{v}}$. Pour résoudre le problème de manière consistante, il faut écrire une équation de Dyson pour la matrice des propagateurs:

$$G = \begin{pmatrix} G_{pp} & G_{p\vec{v}} \\ G_{\vec{v}p} & G_{\vec{v}\vec{v}} \end{pmatrix}$$

du type: $G(\vec{k}, \omega) = G^0(\vec{k}, \omega) + G^0(\vec{k}, \omega) M(\vec{k}, \omega) G(\vec{k}, \omega)$ (3.5-1)
où $G^0(\vec{k}, \omega)$ est donné par (2.3-30, 32, 33) et $M(\vec{k}, \omega)$ est la matrice des self énergies:

$$M = \begin{pmatrix} M_{pp} & M_{p\vec{v}} \\ M_{\vec{v}p} & M_{\vec{v}\vec{v}} \end{pmatrix} = (M_{\epsilon_1 \epsilon_2}) \quad (3.5-2)$$

$M_{\epsilon_1 \epsilon_2}(\vec{k}, \omega)$ étant la somme des diagrammes en bulle ayant un point d'attache du type ϵ_1 et un autre du type ϵ_2 .

En résolvant (3.5-1) et compte tenu de la définition (3.2-8) de la self énergie $\Pi(\vec{k}, \omega)$ associée à $G_{pp}(\vec{k}, \omega)$, il est possible d'exprimer $\Pi(\vec{k}, \omega)$ en termes des $M_{\epsilon_1 \epsilon_2}(\vec{k}, \omega)$ et G^0 . Si l'on considère la partie imaginaire de $\Pi(\vec{k}, \omega)$ elle s'exprime non seulement en termes des

parties imaginaires des $M_{\epsilon_1 \epsilon_2}$ mais fait encore intervenir les parties réelles des $M_{\epsilon_1 \epsilon_2}$. Le calcul des parties réelles donne des termes proportionnels à $\ln(\omega - ck)$ ce qui conduit à des divergences pour $\omega = ck$. Cette divergence est due au fait que les propagateurs G^0 représentent des excitations dont le spectre est purement linéaire [3.5-1]. Une manière d'éviter cette difficulté est d'introduire un spectre phénoménologique qui n'est pas purement linéaire pour les propagateurs $G^0(k, \omega)$.

Une autre manière de procéder, plus concise, consiste à introduire de nouvelles variables collectives A_k et A_k^+ , choisies de manière à découpler l'équation [3.5-1]. Ces nouveaux opérateurs que nous pourrions interpréter comme créateur et annihilateur de phonons nous permettront de calculer l'atténuation ultrasonore directement.

Définissons les A_k et A_k^+ par les deux conditions:

$$i) \quad [A_k; A_{k'}^+]_- = \delta_{kk'} \quad (3.5-3)$$

$$[A_k; A_{k'}]_- = [A_k^+; A_{k'}^+]_- = 0$$

$$\text{soit: } \bar{q}(k, t) \equiv -i \langle T \{ A_k(t) A_{-k}(0) \} \rangle \quad (3.5-4)$$

$$ii) \quad \bar{q}(k, \omega) = 0 \quad (3.5-5)$$

$$\text{Posons alors :} \quad \rho_k = \alpha_k (A_k^+ + A_{-k}) \quad (3.5-6)$$

$$\vec{v}_k = \hat{k} \beta_k (A_k - A_{-k}^+)$$

$$\text{avec } \hat{k} = k/|k|$$

La relation (2.2-12) donne, compte tenu de (3.5-3):

$$2 \alpha_k \beta_k = \rho_0 k \quad (3.5-7)$$

Donc:

$$A_{\vec{k}}^+ = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{\vec{k}}^{-1} \rho_{\vec{k}} + \frac{2\alpha_{\vec{k}}}{\rho_0 k} \hat{k} \cdot \vec{v}_{-\vec{k}} \right\} \quad (3.5-8)$$

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{\vec{k}}^{-1} \rho_{-\vec{k}} + \frac{2\alpha_{\vec{k}}}{\rho_0 k} \hat{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} \right\}$$

Nous pouvons alors exprimer $\bar{g}(\vec{k}, \omega)$ en fonction des $G_{\rho\rho}$, $G_{\rho v}$ et G_{vv} donnés par (2.3-30,32,33) et obtenons:

$$\bar{g}(\vec{k}, \omega) = \frac{k^2}{4(\omega^2 - c^2 k^2 + i\delta)} \left\{ \rho_0 \frac{\alpha_{\vec{k}}^{-2}}{m} - \frac{4\alpha_{\vec{k}}^2}{\rho_0 k^2} mc^2 \right\} \quad (3.5-9)$$

$$\text{Alors (3.5-5)} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\vec{k}} = \left\{ k\rho_0/2mc \right\}^{1/2} \quad (3.5-10)$$

D'où (3.5-8) devient:

$$A_{\vec{k}}^+ = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2mc}{\rho_0 k} \right)^{1/2} \rho_{\vec{k}} + \left(\frac{2}{mc\rho_0 k} \right)^{1/2} \hat{k} \cdot \vec{v}_{-\vec{k}} \right\} \quad (3.5-11)$$

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2mc}{\rho_0 k} \right)^{1/2} \rho_{-\vec{k}} + \left(\frac{2}{mc\rho_0 k} \right)^{1/2} \hat{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} \right\}$$

$$\text{Soit } g(\vec{k}, t) \equiv -i \langle T \{ A_{\vec{k}}(t) A_{\vec{k}}^+(0) \} \rangle \quad (3.5-12)$$

et $g(\vec{k}, \omega)$ sa transformée de Fourier.

En exprimant $g(\vec{k}, \omega)$ en fonction des $G_{\rho\rho}$, $G_{\rho v}$ et G_{vv}

nous obtenons:

$$g(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - ck + i\delta} \quad (3.5-13)$$

Donc nous en concluons que $g(\vec{k}, \omega)$ décrit la propagation d'une excitation élémentaire de spectre $\omega = ck$ dans le système, c'est-à-dire décrit la propagation de phonons. Les opérateurs $A_{\vec{k}}^+$ et $A_{\vec{k}}$ sont donc respectivement des opérateurs de création et d'annihilation de phonons dans l'état $\vec{k}$. Le fait que $\bar{g}(\vec{k}, \omega)$ soit nul, nous montre qu'à $T = 0$, le nombre de phonons est strictement conservé. A $T \neq 0$, cette affirmation reste vraie dans l'approximation où on néglige les pôles autres que les pôles phononiques. L'atténuation ultrasonore sera alors donnée par la partie imaginaire de la self énergie phononique $\Sigma(\vec{k}, \omega)$. L'équivalence entre $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ et la self énergie $\Pi(\vec{k}, \omega)$ de la fonction de corrélation densité-densité a déjà été mise en évidence dans le cadre du modèle hydrodynamique de Landau sous l'hypothèse de la conservation du nombre de phonons par C.P. Enz [3.5-2].

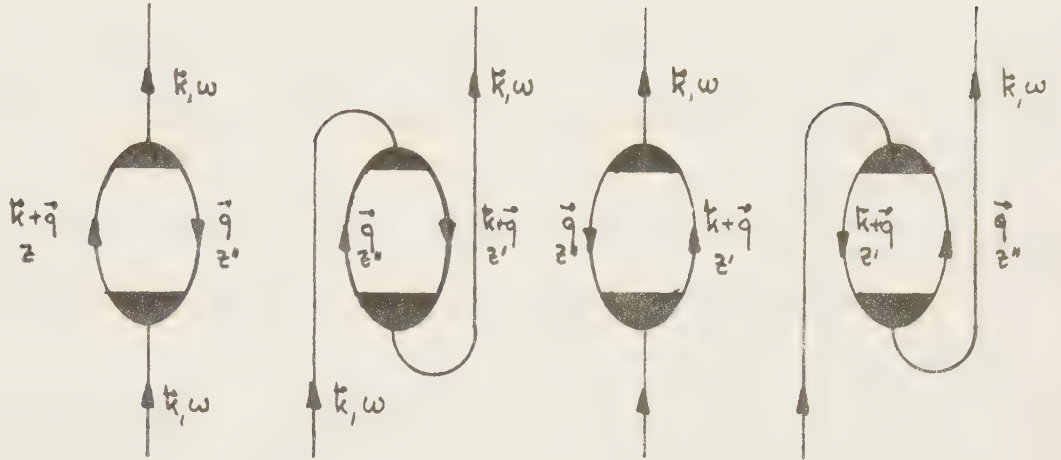
Conformément au §3.3, la contribution au plus bas ordre en ω et T sera donnée par les diagrammes en bulle de la page 96, où les lignes sont phononiques.

Pour évaluer ces diagrammes, il nous faut connaître les trivertex phononiques.

Comme l'ont montré J. Jäckle [3.5-3] et C.P. Enz [3.5-2] dans le cadre du modèle hydrodynamique de Landau, les processus contribuant de manière significative à l'atténuation sont ceux correspondant à l'absorption d'un phonon thermique par le phonon subthermique ultrasonore. Les autres diagrammes en bulle donnent des contributions essentiellement indépendantes de la température, mais on sait qu'à $T = 0$, la partie imaginaire de la self énergie est nulle. La contribution de ces diagrammes est donc non significative car elle est compensée par des contributions des diagrammes

d'ordres supérieurs.

Les diagrammes à calculer sont donc:



Nous avons besoin des trivertex phononiques du type $\square_{A^+(1)A(2)A(3)}$
Les A et A^+ étant obtenus par combinaisons linéaires des ρ et $\bar{\nu}$,
nous pouvons écrire eu égard à (3.3-8), dans la limite isotherme:

$$\lim_{k_{1,2,3} \rightarrow 0} \square_{A^+(1)A(2)A(3)} = \square(1,2,3) =$$

$$= - \lim_{k_{1,2,3} \rightarrow 0} \frac{\delta^3 F}{\delta \rho(1'\epsilon_1') \delta \rho(2'\epsilon_2') \delta \rho(3'\epsilon_3')} \frac{\delta \rho(1'\epsilon_1') \delta \rho(2'\epsilon_2') \delta \rho(3'\epsilon_3')}{\delta A^+(1) \delta A(2) \delta A(3)} \quad (3.5-14)$$

soit avec (3.5-11):

$$\square(1,2,3) = - \lim_{k_{1,2,3} \rightarrow 0} \frac{\delta^3 F}{\delta \rho(1\epsilon_1) \delta \rho(2\epsilon_2) \delta \rho(3\epsilon_3)} \cdot \frac{\delta \rho(1\epsilon_1) \delta \rho(2\epsilon_2) \delta \rho(3\epsilon_3)}{\delta A^+(1) \delta A(2) \delta A(3)} \quad (3.5-15)$$

d'où, compte tenu de (3.4.14,15) et (3.5-11), il vient:

$$\underline{C(1,2,3) = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}}{8 \rho_0 m} \right\}^{1/2} \left\{ (2u-1) + \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2 + \hat{k}_2 \cdot \hat{k}_3 + \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_3 \right\}} \quad (3.5-16)$$

La limite isotherme (statique puis à grande longueur d'onde) du trivertex phononique redonne l'interaction à trois phonons du modèle de Landau [3.1-11] .

En appliquant les règles de calcul du §3.3, nous obtenons pour les diagrammes de la page 109.

$$\begin{aligned} \pi(\vec{k}, z) &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{q} dz' dz'' A(\vec{k}+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'') \{1+f(z')\} f(z'') . \\ &\quad \cdot \frac{1}{z-z'+z''} \left\{ C(\vec{k}, z; \vec{k}+\vec{q}, z'; \vec{q}, z'') \right\}^2 + \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{q} dz' dz'' A(\vec{k}+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'') \{1+f(z'')\} f(z') . \\ &\quad \cdot \frac{1}{-z+z'-z''} \left\{ C(\vec{k}, z; \vec{k}+\vec{q}, z'; \vec{q}, z'') \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.5-17)$$

Pour $z = \omega + i\delta$, il vient:

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi(\vec{k}, \omega + i\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{q} dz' dz'' A(\vec{k}+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'') \{1+f(z'')\} f(z') \\ &\quad \cdot \delta(z'-z''-\omega) \left\{ C(\vec{k}, \omega; \vec{k}+\vec{q}, z'; \vec{q}, z'') \right\}^2 \\ &- \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{q} dz' dz'' A(\vec{k}+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'') \{1+f(z')\} f(z'') . \\ &\quad \cdot \delta(\omega - z' + z'') \left\{ C(\vec{k}, \omega; \vec{k}+\vec{q}, z'; \vec{q}, z'') \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.5-18)$$

en regroupant les termes:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(k; \omega + i\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{q} \, dz' dz'' A(k+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'-\omega) \\ &\left\{ f(z') - f(z'-\omega) \right\} \left\{ C(k, \omega; k+\vec{q}, z', \vec{q}, z'-\omega) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.5-19)$$

La contribution au plus bas ordre en ω et T sera obtenue en remplaçant le trivertex C par sa limite isotherme à température zéro.

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(k; \omega + i\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{q} \, C^2(k, k+\vec{q}, \vec{q}) \cdot \\ &\cdot \int dz' A(k+\vec{q}, z') A(\vec{q}, z'-\omega) [f(z') - f(z'-\omega)] \end{aligned} \quad (3.5-20)$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de Pethick et Ter Haar [3.1-11]. Nous choisissons comme fonction spectrale une lorentzienne de la forme:

$$A(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\vec{q})}{[\omega - \epsilon(\vec{q})]^2 + \Gamma^2(\vec{q})} \quad (3.5-21)$$

où Γ^{-1} est le temps de vie des phonons thermiques et $\epsilon(\vec{q})$ est l'énergie des phonons. En remplaçant $\epsilon(\vec{q})$ par un spectre phénoménologique [3.5-4] de la forme:

$$\epsilon(\vec{q}) = cq (1 - \gamma q^2) \quad (3.5-22)$$

$\Gamma(\vec{q})$ est déterminé par les processus à trois phonons et $\Gamma(\vec{q}, \omega)$ ne varie pas toujours lentement au voisinage de $\omega = cq$. Donc une fonction spectrale lorentzienne ne semble pas très justifiée. La question de savoir si une

modification de la fonction spectrale a une influence importante sur $\text{Im } \pi(\vec{k}, \omega + i\delta)$ a été discutée en détails par J. Jäckle [3.5-3,5]. Il en conclut que, dans le domaine de fréquences $\Gamma \ll \omega \ll k_B T$, le résultat n'est pas influencé si l'on choisi une fonction spectrale lorentzienne. Ce domaine de fréquences est justement celui du régime sans collisions auquel nous nous intéressons.

De 3.5-21 nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \int dz' A(\vec{k} + \vec{q}, z') A(\vec{q}, z' - \omega) \{ f(z') - f(z' - \omega) \} = \\ & = \left. \frac{df}{d\epsilon} \right|_{\epsilon(\vec{q})} \omega \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\vec{q}} + \Gamma_{\vec{k} + \vec{q}}}{[\omega - \epsilon(\vec{q}) + \epsilon(\vec{k} + \vec{q})]^2 + [\Gamma_{\vec{q}} + \Gamma_{\vec{k} + \vec{q}}]^2} \end{aligned} \quad (3.5-23)$$

Posons: $\bar{\Gamma}_{\vec{q}} = \Gamma_{\vec{q}} + \Gamma_{\vec{k} + \vec{q}}$

Pour $k \ll q$ et $\cos(\vec{k} \cdot \vec{q}) \approx 1$, le trivertex $\Gamma(1,2,3)$ peut être approximé par:

$$\Gamma(1,2,3) = - \left\{ c \frac{k_1 k_2 k_3}{2\rho_0 m} \right\}^{1/2} (u+1) \quad (3.5-24)$$

Alors (3.5-20) devient:

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi(\vec{k}, \omega + i\delta) &= \frac{\omega}{2\pi^2} \frac{(u+1)^2 c k}{2\rho_0 m} \cdot \\ & \cdot \int d^3\vec{q} q |\vec{k} + \vec{q}| \frac{\bar{\Gamma}(\vec{q})}{[\omega - \epsilon(\vec{q}) + \epsilon(\vec{k} + \vec{q})]^2 + \bar{\Gamma}^2(\vec{q})} \left. \frac{df}{d\epsilon} \right|_{\epsilon(\vec{q})} \end{aligned}$$

$$\epsilon(\vec{k} + \vec{q}) \approx \epsilon(\vec{q}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{q}} \cdot \vec{k} \approx \epsilon(\vec{q}) + ck(1 - 3\gamma q^2) \cos \theta$$

où $\theta = \chi(\vec{k}, \vec{q})$, $\cos \theta = \xi$

$$\epsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon(\vec{q}) + \omega \simeq ck(1-3\gamma q^2)\xi + \omega$$

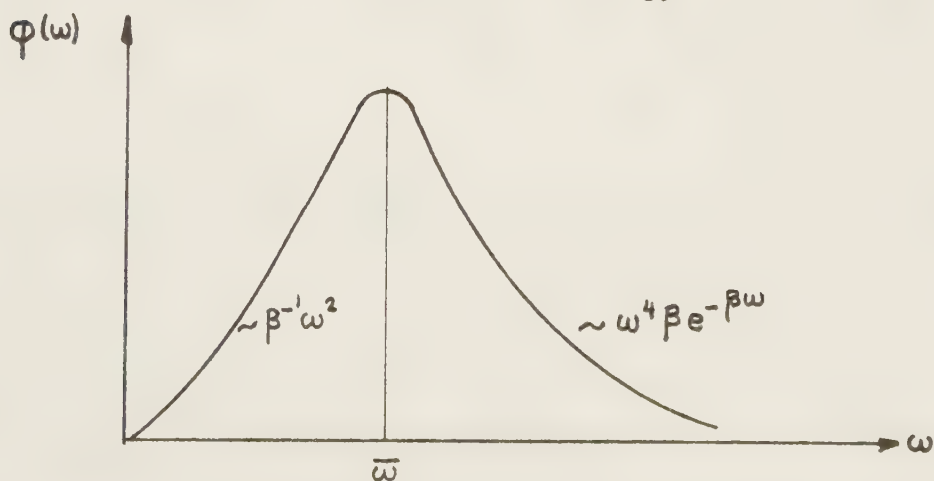
$$\text{Im } \Pi(\vec{k}, \omega + i\delta) = \frac{\omega}{\pi} \frac{(u+1)^2 ck}{2\rho_0 m} \int_0^{q_0} dq q^4 \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon(\vec{q})} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\Gamma}_{\vec{q}} d\xi}{[ck(1-3\gamma q^2)\xi + \omega]^2 + \bar{\Gamma}_{\vec{q}}^2} \quad (3.5-25)$$

Mais :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\Gamma}_{\vec{q}} d\xi}{[ck(1-3\gamma q^2)\xi + \omega]^2 + \bar{\Gamma}_{\vec{q}}^2} =$$

$$= -\frac{1}{ck} \left[\text{Arc tg} \left\{ \frac{\omega + ck(1-3\gamma q^2)}{\bar{\Gamma}_{\vec{q}}} \right\} - \text{Arc tg} \left\{ \frac{\omega - ck(1-3\gamma q^2)}{\bar{\Gamma}_{\vec{q}}} \right\} \right] \quad (3.5-26)$$

D'autre part, la fonction $\varphi(\omega) = -\omega^4 \frac{\partial f}{\partial \omega}$ a l'allure suivante:



Le maximum se situe à $\bar{\omega} = 3,8 \ k_B T$

La fonction (3.5-26) variant peu au voisinage de $\bar{\omega}$, on peut la sortir de l'intégrale en prenant sa valeur à $\bar{\omega}$. Donc:

$$q \rightarrow \bar{q} = 3,8 \, k_B T / c$$

$$\bar{\Gamma}_q \rightarrow \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{\bar{q}} \quad (3.5-27)$$

D'autre part $\Phi(\omega)$ tendant assez vite vers zéro pour grands ω , on peut supprimer le cut-off q_0 dans l'intégrale sur les impulsions. Compte tenu du fait que:

$$\int_0^\infty d\omega(\vec{q}) \, \omega^4(\vec{q}) \left. \frac{\partial f}{\partial \omega} \right|_{\omega(\vec{q})} = - \frac{\pi^4}{15} (k_B T)^4 \quad (3.5-28)$$

avec $\omega(\vec{q}) = c|\vec{q}|$, il vient finalement, pour $\text{Im } \Pi(\vec{k}, \omega + i\delta)$:

$$\text{Im } \Pi(\vec{k}; \omega + i\delta) = - \frac{\pi^3 k_B^4}{30 m_p c^5} (u+1)^2 \omega T^4 \cdot \left[\text{Arc tg} \left(\frac{\omega + ck}{\bar{\Gamma}} \right) - \text{Arc tg} \left(\frac{3\gamma \omega}{2\bar{\Gamma}} \left\{ 3,8 \, k_B T / c \right\} \right) \right] \quad (3.5-29)$$

Avec $2\Gamma \equiv \bar{\Gamma}$, nous obtenons finalement de (3.2-12) et (3.5-29) le coefficient d'atténuation ultrasonore:

$$\alpha(\omega, T) = \frac{\pi^3 (u+1)^2}{60 m_p c^6} \omega T^4 \left[\text{Arc tg} \left(\frac{\omega}{\bar{\Gamma}} \right) - \text{Arc tg} \left(\frac{3\gamma \omega}{\bar{\Gamma}} \left\{ \frac{3,8 \, k_B T}{c} \right\} \right) \right] \quad (3.5-30)$$

L'atténuation est donc caractérisée par trois paramètres: la constante de Grüneisen u , la largeur de raie des phonons thermiques $\bar{\Gamma}$ et la constante de dispersion du spectre γ . Si la constante de Grüneisen est relativement bien connue, la largeur de raie l'est beaucoup moins [3.3-1,6,6]. Quant à la dispersion, elle est discutée au paragraphe suivant.

III.6. DISPERSION DU SPECTRE A PETITS K.

Le calcul de l'atténuation ultrasonore développé dans les paragraphes précédents repose entre autre sur l'existence du processus à trois phonons. Un tel processus n'existera que si la conservation d'énergie impulsion le permet. Il est immédiat de voir que si la dispersion est positive, c'est-à-dire si $\epsilon(k) = ck(1 - \gamma k^2)$ avec $\gamma > 0$ (3.6-1) le processus à trois phonons est interdit à $T = 0$.

Si $\gamma = 0$, il n'est permis que pour des phonons colinéaires, et si $\gamma < 0$ (dispersion anormale) il est permis aussi pour des phonons non colinéaires.

La première estimation de γ à $T = 0$ a été donnée par Landau en 1949 [3.6-1]. En ajustant le spectre phonon-roton par une fonction du type:

$$\epsilon^2 = A_1 k^2 + A_2 k^4 + A_3 k^6 + \dots$$

il obtient une expression de γ en fonction des paramètres des rotons et numériquement $\gamma \simeq 2,8 \cdot 10^{37}$ (cgs). L'affirmation d'un γ positif signifie que le spectre des excitations est stable, c'est-à-dire qu'il est impossible à un phonon de se désintégrer en deux autres phonons d'énergie plus basse. Cet argument a été admis pendant plus de 25 ans. Eckstein et Varga [3.6-2] ont obtenu un γ de cet ordre de grandeur au plus bas ordre de théorie de perturbation à $T = 0$ dans le cadre du modèle hydrodynamique de Landau.

Si le processus à trois phonons est interdit, l'atténuation ultrasonore

résulte alors des processus de diffusion de deux phonons. Landau et Khalatnikov ont calculé l'atténuation correspondante et ont obtenu une dépendance en ωT^6 [3.6-1]. Cependant certains termes ont été oubliés dans leur calcul. Le résultat correct obtenu par J. Jäckle est une dépendance en $\omega^3 T^4$ [3.1-9]. Les expériences d'atténuation ne correspondent pas à cette prédiction mais sont plutôt en accord avec une dépendance en ωT^4 donc en accord avec le processus à trois phonons.

Cette contradiction ($\alpha \sim \omega T^4$ et $\gamma > 0$) a été partiellement soulevée par l'argument de K. Kawasaki [3.6-3]. Selon cet argument, lors du processus $A \rightarrow B + C$, la largeur de raie des phonons B et C peut être du même ordre de grandeur que le déficit d'énergie du processus. Donc, ce processus devient possible et sera dominant pour la durée de vie du phonon A. Diverses tentatives ont été faites pour justifier cette hypothèse, par Simons [3.6-4] et Leggelt Ter Haar [3.6-5] entre autres.

De nombreux faits expérimentaux récents nous laissent supposer que la dispersion du spectre à petits k est anormale. Les expériences nous renseignant sur γ sont essentiellement de quatre types:

- i) Le spectre d'excitations mesuré par diffusion neutronique.
- ii) Les mesures d'atténuation ultrasonore (c.f. formule 3.5-30).
- iii) Les mesures calorimétriques (chaleur spécifique).
- iv) Les mesures du facteur de structure par diffusion de rayons X.

Tous les résultats expérimentaux sont ajustés à une forme de spectre choisie au départ. Pour un spectre du type:

$$\epsilon(k) = \omega k (1 - \gamma k^2 - \delta k^4) \quad (3.6-2)$$

Les résultats obtenus sont les suivants:

a) A.D.B. Woods et R.A. Cowley [3.6-6] en mesurant le spectre par diffusion de neutrons pour $k \geq 0,2 \text{ \AA}^{-1}$ et $T = 1,1 \text{ }^\circ\text{K}$ obtiennent:

$$\gamma = (0 \pm 2) 10^{36} \text{ (cgs)} \quad \delta = (2,4 \pm 0,2) 10^{75} \text{ (cgs)}$$

b) H.J. Maris et W.E. Massey [3.6-7] en analysant les résultats d'atténuation ultrasonore de Abraham ($T < 0,6 \text{ }^\circ\text{K}$) à l'aide de (3.5-30) arrivent à la conclusion que γ doit être négatif pour que les termes en Arc tg contribuent de manière additive à l'atténuation. Pourtant une analyse plus qualitative du problème, faite par R. Klein et K. Wehner [3.6-8] montre que l'argument de Maris et Massey n'est applicable que pour $T < 0,1 \text{ }^\circ\text{K}$, région dans laquelle il n'existe pas encore de mesures.

c) N.E. Phillips, C.G. Watterfield et J.K. Hofer [3.6-9] mesurent la chaleur spécifique de l' He^4 à volume constant. En fittant les mesures avec la chaleur spécifique d'un gaz de phonons et de rotons sans interactions, ils obtiennent: $\gamma < 0$ pour une pression $p < 6 \text{ atm.}$ et $\gamma > 0$ pour $p > 6 \text{ atm.}$ avec $\delta = 0$.

Récemment K. Yamada et K. Ishikawa [3.6-14] ont regardé sous quelles conditions un "fit" des expériences avec la chaleur spécifique d'un gaz sans interactions était significatif. Dans le cadre du modèle hydrodynamique de Landau, ils calculent la self énergie à température finie $\Sigma(k)$ au

second ordre en H^3 et au premier ordre en H^4 . Ils évaluent alors la correction à la chaleur spécifique ΔC_V due à ces interactions. Ils obtiennent pour un spectre de la forme (3.6-2) à $T = 0$:

$$C_V = C_V^0 + \Delta C_V \quad \text{avec:}$$

$$C_V^0 = A \left[T^3 + \frac{25}{\gamma} \left(\frac{2\pi k_B}{c} \right)^2 T^5 + 7(4\gamma^2 + 6) \left(\frac{2\pi k_B}{c} \right)^4 T^7 \right] \quad (3.6-3)$$

$$\Delta C_V = A \frac{S}{c} T^7 \left(-7\alpha(T) + \frac{15}{4} \right) \quad (3.6-4)$$

$$\text{où: } \alpha(T) = \ln \left[\frac{2}{3\gamma} \left(\frac{c}{k_B T} \right)^2 \right] - \text{cte}$$

ΔC_V est du même ordre de grandeur que le terme en T^7 de C_V^0 et pour $T < 0,5^\circ K$ à haute et basse pressions, ces termes sont négligeables devant les deux premiers de C_V^0 , considérés par Phillips. Donc, la valeur mesurée de γ à la pression de vapeur saturée $\gamma = -4,1 \cdot 10^{37}$ cgs. est digne de foi. Par contre, pour certaines pressions intermédiaires où γ semble s'approcher de zéro, ΔC_V peut donner lieu à une déviation mesurable de la loi en T^3 .

Yamada et Ishikawa prédisent aussi une dépendance en température de γ . Leur argument est le suivant. Ils séparent la self énergie $\Sigma(k)$ en une partie indépendante de la température $\Sigma^0(k)$ et une partie dépendante de la température $\Sigma^{(T)}(k)$. Les résultats obtenus à partir de $\Sigma^0(k)$ dépendant très fortement d'un cutt-off (c.f. [3.6-2]) sont jugés non significatifs. γ ($T = 0$) est considéré comme un paramètre déterminé expérimentalement et la valeur retenue est celle de Phillips: γ ($T = 0$) = $-4,1 \cdot 10^{37}$ cgs.

Par contre $\sum^{(T)}(k)$ donne la correction en température. Ils obtiennent ainsi, dans la limite des petits k :

$$\gamma(T) = (-4,1 + 0,36 T^2) 10^{37} \text{ cgs.} \quad (3.6-5)$$

ce qui donne un γ négatif pour toutes températures dans l'hélium liquide.

d) J. Jäckle, K.W. Kehr [3.6-10] en interprétant les mesures d'atténuation sonore sous pression obtiennent:

$$\gamma \sim -10^{38} \text{ cgs} \quad \delta \sim 10^{38} \text{ cgs}$$

e) R. Hallock [3.6-11] en mesurant le facteur de structure $S(k)$ par diffusion de rayons X obtient: $\gamma \sim (1,6 \pm 3,6) 10^{36} \text{ cgs.}$

f) En supposant $\gamma < 0$, H.J. Maris [3.6-12] calcule l'atténuation et la vitesse du son en utilisant l'équation cinétique de Landau Khalatnikov et l'équation de Boltzmann pour les phonons. Une analyse détaillée entre théorie et expérience à 0,35°K donne un bon agrément sur une grande plage de fréquences.

Finalement, d'autres formes de spectre ont été essayées pour fitter les expériences de Woods et Cowley de diffusion de neutrons. A. Molinari et T. Regge [3.6-13] en essayant différentes formes de spectre obtiennent le meilleur fit pour:

$$\epsilon(k) = ck \left\{ 1 + 0,55k - 1,35 k^2 + 0,26 k^3 + 0,19 k^4 - 0,05 k^5 \right\}^{1/2}$$

ce qui, pour petits k donne bien une dispersion anormale.

En résumé, il semble donc que les expériences permettent de conclure en faveur d'une dispersion anormale dans la limite des petits k .

Il est alors intéressant de regarder si l'on peut obtenir théoriquement une prédiction sur γ et plus particulièrement à partir d'une théorie microscopique.

Les seuls résultats dérivant d'une théorie microscopique connus à ce jour concernent le cas d'un gaz de Bose dilué. S. Ma, M. Gould et V.K. Wong [2.3-7, 3.1-7] ont considéré le problème dans le cas d'un gaz de Bose dilué et en interactions faibles. Dans un formalisme original de constante diélectrique généralisée, ils obtiennent à $T = 0$:

$$\epsilon(k) = k (c_0 + c_2 k^2 + c_4 k^4 \ln k) \quad (3.6-6)$$

avec $c_2 > 0$. Donc la dispersion est anormale et d'autre part il apparaît des termes non analytiques du type $k^4 \ln k$.

Nous avons considéré [3.6-15 et appendice] un gaz de Bose dilué caractérisé par le paramètre de dilution β et d'interaction φ . En résolvant le problème par la technique habituelle de Dyson-Beliaev et en considérant les self énergies d'ordre zéro en β mais à tous les ordres en φ , nous obtenons que le résultat de Bogolioubov pour la dispersion est exact à l'ordre β^2 près, c'est-à-dire:

$$\gamma = (1 - 12,6 \beta^2) \gamma_0 \quad \gamma_0 \approx -5 \cdot 10^{36} \text{ cgs} \quad (3.6-7)$$

Néanmoins, comme nous l'avons vu au chapitre 1, le gaz de Bose dilué n'est pas une bonne description de l'hélium liquide. Aussi, il nous a paru nécessaire d'évaluer γ dans le cadre d'un modèle significatif pour l'hélium, celui décrit au chapitre 2. En retournant à (2.3-20) nous avons considéré les termes d'ordre supérieur à un dans le développement. En substituant dans (2.3-30) à (2.3-33), on peut obtenir formellement une expression pour γ . Le problème est que cette expression contient des termes du type M_{kk} et M_{kw} sur lesquels nous ne pouvons rien dire. Il n'est donc pas possible de déterminer le signe de γ par cette approche et le problème reste pour l'instant ouvert.

C H A P I T R E I V

C a l c u l d e l a v i t e s s e

d u s o n e t d e s p r o p r i é t é s

t h e r m o d y n a m i q u e s à

l ' a i d e d e s i d e n t i t é s d e

W a r d .

IV.1. INTRODUCTION.

La mesure de la vitesse du son en fonction de la température dans l'hélium liquide a déjà donné lieu à de nombreuses expériences [4-1,2]. Les mesures les plus précises à basses température disponibles à ce jour viennent d'être publiées par R. Roach et collaborateurs [4-3]. Faites pour des températures variant entre 0.07°K et 0,7°K et pour des fréquences entre 12 et 105 Mhz, ces mesures montrent que la vitesse du son varie avec la température approximativement comme T^4 . On constate de plus une dépendance en fréquence caractérisée par une inversion de l'ordre des courbes à fréquence constante au voisinage de $T = 0,2^\circ\text{K}$. C'est-à-dire, pour $T < 0,2^\circ\text{K}$, la différence $c(T) - c(0)$ croît si la fréquence croît, alors que pour $T > 0,2^\circ\text{K}$ c'est l'inverse qui a lieu.

Comment se présente la situation sur le plan théorique? La majeure partie des estimations faites pour $c(T)$ reposent sur le modèle hydrodynamique de Landau. Une première approche consiste à calculer la renormalisation de la vitesse du son liée au processus à trois phonons, c'est-à-dire de calculer la partie réelle des diagrammes en bulles considérés au chapitre III pour l'atténuation ultrasonore. On obtient alors [3.1-8, 11, 12] :

$$\delta c(T, \omega) = c(T, \omega) - c(0, \omega) = \frac{\pi^2}{60} \frac{(u+1)^2}{\rho \hbar^3} \left(\frac{k_B T}{c} \right)^4 \cdot \left\{ \ln \frac{1 + (2\omega\tau)^2}{1 + (3\gamma \bar{\rho}^2 \omega \tau)^2} + B \right\} \quad (4.1)$$

où: u = constante de Grüneisen.

$$\bar{p} = 3,8 k_B T / c$$

γ = facteur de dispersion du spectre phononique

τ = temps de vie des phonons thermiques

B = constante (pouvant varier selon les approximations faites dans le calcul)

Klein et Wehner ont montré d'autre part que $\tau \propto T^{-5}$ [4-4]. Donc, dans la limite $T \rightarrow 0$, pour tout ω fixe on est dans le régime sans collisions: $\omega\tau \gg 1$. Dans cette limite, (4.1) est de la forme:

$$\delta c(T) = AT^4 (\ln T + B) \quad (4.2)$$

Il faut cependant remarquer que la limite $T \rightarrow 0$ implique aussi que pour tout ω , on a toujours $\omega \gg k_B T$, alors que le résultat (4.1) est établi sous les hypothèses de phonons subthermiques $\omega \ll k_B T$.

Une seconde approche basée également sur le modèle hydrodynamique a été développée par H. Beck et P.F. Meier [4-5]. Ils obtiennent $\delta c(T)$ comme solution d'une équation numérique du type:

$$\delta c(T) = a \exp(-b\delta c(T)/T^4) \quad (4.3)$$

a et b étant fonction de la dispersion γ et du temps de vie des phonons thermiques τ .

Ni la relation (4.1) ni la relation (4.3) n'expliquent les mesures expérimentales. Une approche microscopique de la limite $T \rightarrow 0$ semble donc souhaitable. Divers travaux ont été faits dans cette direction. En considérant

le cas d'un gaz de Bose dilué, Ma, Gould et Wong [3,1-7] et Hohenberg [3.1-8] obtiennent également une dépendance de la vitesse du son avec la température du type (4.2). Du fait de la limite de leur validité (gaz dilué), ces résultats ne sont pas très significatifs pour l'hélium liquide. La seule description microscopique donnant un comportement correct en T^4 a été obtenue par C.P. Enz [1-29]. En partant d'un hamiltonien microscopique et en écrivant l'équation de mouvement pour l'opérateur densité de particules, il obtient:

$$\delta c(T) = a T^4$$

Ce résultat est valable dans la limite de Nernst, c'est-à-dire $T \rightarrow 0$ et $\omega \tau_{el}(T) < 1$ (régime hydrodynamique). Si le comportement en température est satisfaisant, le coefficient a est beaucoup trop petit pour refléter la situation expérimentale.

Récemment H.J. Marris [3.6-12] a développé une théorie basée sur les équations cinétiques de Khalatnikov et l'équation de Boltzmann pour les phonons. En faisant entrer le trivertex sans approximations dans l'intégrale de collision, il obtient, pour $T = 0,35^\circ K$, un $\delta c(\omega)$ comme solution d'une équation qui correspond bien aux mesures.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier la limite $T \rightarrow 0$ dans le cadre de notre modèle microscopique de l'hélium en termes de variables collectives. S'il était possible de calculer la partie imaginaire de la self énergie au plus bas ordre en T et à tous les ordres dans l'interaction en ne considérant que les diagrammes en bulle (c.f. Ch. III), il n'existe rien d'équivalent pour la partie réelle. Dans le but de calculer la dépendance de la vitesse du son en température au plus bas ordre en T , mais en tenant

compte de l'interaction à tous les ordres, nous allons développer un formalisme basé sur des identités de Ward.

IV.2. IDENTITES DE WARD .

Une identité de Ward est l'expression en termes microscopiques d'une loi de conservation ou d'une règle de somme thermodynamique pour un système à N corps. Elle relie essentiellement une fonction vertex à la dérivée de la fonction de Green à une particule par rapport à une variable. Si cette variable a un caractère dynamique, on parle d'identité de Ward dynamique, si elle a un caractère thermodynamique, on parle d'identité de Ward thermodynamique.

Les premières identités de Ward ont été dérivées dans le cadre de l'électrodynamique quantique [4-6] pour exprimer l'invariance de jauge de la théorie. L'idée a été reprise dans le cadre de la théorie microscopique des liquides de Fermi par Luttinger, Nozières [2.3-1, 4-7] et Abrikosov, Gorkov, Dzyaloshinskii [2.3-2]. Les relations obtenues expriment la conservation de l'énergie, de l'impulsion et du nombre de particules. Dans le cadre des liquides de Bose, K. Huang, A. Klein [1-22], F. de Pascale, G. Jona-Lasinio et E. Tabet [4-8], K. Kehr [2.3-3] dérivent des identités de Ward pour le nombre total de particules. Une difficulté provient du fait qu'une partie des particules est dans le condensé et qu'en

plus du propagateur normal, il apparaît des fonctions à deux points anormales. Les relations cherchées sont obtenues par l'emploi de méthodes fonctionnelles combinées avec l'équation de continuité pour la densité de particules.

Nous nous proposons dans ce qui suit de dériver des identités de Ward pour une grandeur conservée quelconque dans le cas d'une assemblée de bosons en interactions. En partant d'une équation de continuité ou d'une règle de somme thermodynamique, nous dériverons de manière purement algébrique les identités cherchées. Cette approche possède l'avantage de mettre particulièrement bien en évidence l'essentiel de contenu physique.

IV.2.1. IDENTITES DE WARD DYNAMIQUES.

Nous considérons des bosons satisfaisant les relations de commutation:

$$[a_{\vec{k}} ; a_{\vec{\ell}}^+]_- = \delta_{\vec{k}\vec{\ell}} \quad (4.2-1)$$

$$[a_{\vec{k}} ; a_{\vec{\ell}}]_- = [a_{\vec{k}}^+ ; a_{\vec{\ell}}^+]_- = 0$$

Soit C une grandeur conservée dans le système dont la densité $c(\vec{x}, t)$ satisfait l'équation de continuité:

$$\partial_t c(\vec{x}, t) + \text{div } \vec{j}_c(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.2-2)$$

$\vec{j}_c$ étant le courant correspondant.

En transformée de Fourier:
$$c(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} d\omega c(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

(4.2-2) s'écrit:
$$\partial_t c(\vec{k}, t) + i\vec{k} \cdot \vec{j}_c(\vec{k}, t) = 0 \quad (4.2-3)$$

Ecrivons alors $c(\vec{k})$ sous la forme:

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} f_c(\vec{q}, \vec{k}) a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}+\vec{k}} \quad (4.2-4)$$

et définissons:

$$F_c(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, t_1, t_2, t_3) = \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2}^+(t_2) c(\vec{k}_3, t_3) \} \rangle \quad (4.2-5)$$

avec $\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A)$ $\rho = e^{-\beta(H-\Omega)}$: $\text{tr} \rho = 1$

les opérateurs évoluant dans la représentation de Heisenberg. On a alors l'identité algébrique suivante:

$$\partial_{t_3} F_c(\vec{k}_1, t_1) = \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2}^+(t_2) \partial_{t_3} c(\vec{k}_3, t_3) \} \rangle +$$

$$\begin{aligned}
 & + i\delta(t_3 - t_2) f_c(\vec{k}_2 - \vec{k}_3, k_3) \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2 - \vec{k}_3}^+(t_2) \} \rangle - \\
 & - i\delta(t_3 - t_1) f_c(\vec{k}_1, \vec{k}_3) \langle T \{ a_{\vec{k}_2}^+(t_2) a_{\vec{k}_1 + \vec{k}_3}(t_1) \} \rangle
 \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

soit en introduisant la fonction de Green à une particule et compte tenu de (4.2-3) :

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_3} E_c(\vec{k}_1, t_1) = & -i\vec{k}_3 \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2}^+(t_2) \int_c(\vec{k}_3, t_3) \} \rangle + \\
 & + i\delta(t_3 - t_2) f_c(\vec{k}_2 - \vec{k}_3, \vec{k}_3) G(\vec{k}_1, t_1; \vec{k}_2 - \vec{k}_3, t_2) - \\
 & - i\delta(t_3 - t_1) f_c(\vec{k}_1, \vec{k}_3) G(\vec{k}_1 + \vec{k}_3, t_1; \vec{k}_2, t_2)
 \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

$$\text{Posons encore: } \vec{E}_c(\vec{k}_1, t_1) = \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2}^+(t_2) \int_c(\vec{k}_3, t_3) \} \rangle \quad (4.2-8)$$

Introduisons alors la fonction de Green à deux particules définie par:

$$G^{\text{II}}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4; t_1, t_2, t_3, t_4) = \langle T \{ a_{\vec{k}_1}(t_1) a_{\vec{k}_2}(t_2) a_{\vec{k}_3}^+(t_3) a_{\vec{k}_4}^+(t_4) \} \rangle \quad (4.2-9)$$

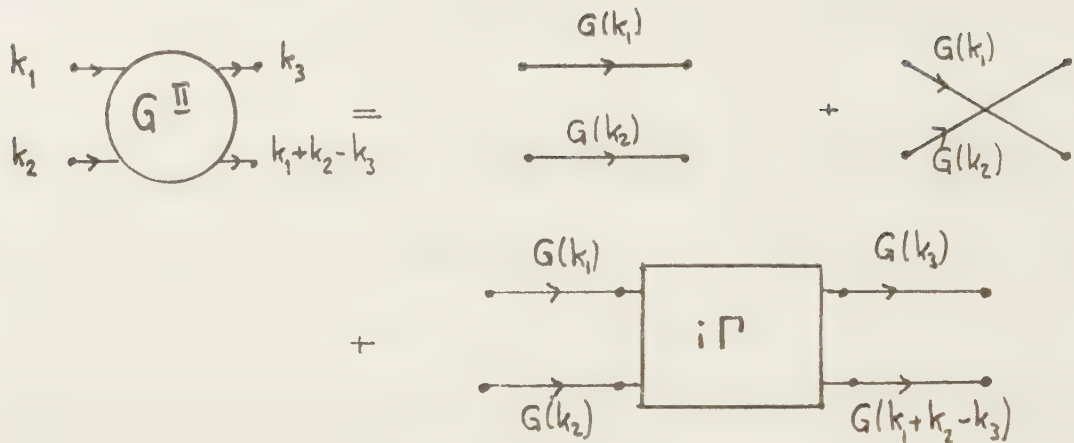
En passant en transformée de Fourier sur les temps, et avec $k \equiv (\vec{k}, \omega)$, l'homogénéité du temps et de l'espace implique que:

$$G^{\text{II}}(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2\pi)^4 \overline{G}^{\text{II}}(k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3) \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \quad (4.2-10)$$

en mettant en évidence le quadrivertex Γ , nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}
 \overline{G}^{\text{II}}(k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3) = & (2\pi)^4 G(k_1) G(k_2) \{ \delta(k_1 - k_3) + \delta(k_2 - k_3) \} + \\
 & + iG(k_1) G(k_2) G(k_3) G(k_1 + k_2 - k_3) \Gamma(k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3)
 \end{aligned} \quad (4.2-11)$$

Soit diagrammatiquement:



Définissons encore les limites adiabatique (indice ω) et isotherme (indice k) [2.3-6] .

$$\lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \lim_{\vec{k}_3 \rightarrow 0} \Gamma(k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3) = \Gamma^\omega(k_1, k_2)$$

$$\lim_{\vec{k}_3 \rightarrow 0} \lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \Gamma(k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3) = \Gamma^k(k_1, k_2) \quad (4.2-12)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\vec{k}_1, \omega) G(\vec{k}_1, \omega_1 + \omega) = \{G^2(k_1)\}^\omega$$

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} G(\vec{k}_1, \omega_1) G(\vec{k}_1 + \vec{k}, \omega_1) = \{G^2(k_1)\}^k$$

Revenons alors à (4.2-5). Compte tenu de (4.2-4), nous pouvons écrire:

$$F_c(\vec{k}_i, t_i) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} f_c(\vec{q}, \vec{k}_3) F_c(\vec{q}, \vec{k}_i, t_i)$$

soit en transformée de Fourier:

$$F_c(k_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q f_c(\vec{q}, \vec{k}_3) F_c(q, k_i) \quad (4.2-13)$$

L'homogénéité de l'espace et du temps implique que:

$$F_c(k_1, k_2, k_3) = \bar{F}_c(k_1, k_3) (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_3 - k_2) \quad (4.2-14)$$

et de même pour $\bar{E}_c$. L'équation (4.2-7) s'écrit alors:

$$-\omega_3 \bar{F}_c(k_1, k_3) \delta(k_1 + k_3 - k_2) = -k_3 \bar{E}_c(k_1, k_3) \delta(k_1 + k_3 - k_2) + f_c(\vec{k}_1; \vec{k}_3) \{ G(k_1) - G(\vec{k}_1 + \vec{k}_3; \omega_1 - \omega_3) \} \delta(k_1 + k_3 - k_2) \quad (4.2-15)$$

$$\text{D'où: } \lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \lim_{k_3 \rightarrow 0} \bar{F}_c(k_1, k_3) = -f_c(\vec{k}_1) \frac{\partial G(k_1)}{\partial \omega_1} \quad (4.2-16)$$

$$\text{où: } f_c(\vec{q}) = f_c(\vec{q}; k=0)$$

$$\lim_{k_3 \rightarrow 0} \lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \bar{E}_c(k_1, k_3) = -f_c(\vec{k}_1) \frac{\partial G(k_1)}{\partial k_1} \quad (4.2-17)$$

D'autre part dans (4.2-13) nous avons: $F_c(q; k_i) = G^{\text{II}}(k_i, k_3 + q; k_2; q)$.

De (4.2-11, 12, 13, 14) il suit alors immédiatement que:

$$\lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \lim_{k_3 \rightarrow 0} \bar{F}_c(k_1; k_3) = \{G^2(k_1)\}^\omega \left\{ f_c(\vec{k}_1) + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \{G^2(q)\}^\omega \Gamma^\omega(k; q) f_c(\vec{q}) \right\}$$

d'où en comparant avec (4.2-16) :

$$f_c(\vec{k}_1) \frac{\partial G(k_1)}{\partial \omega_1} = - \{G^2(k_1)\}^\omega \left\{ f_c(\vec{k}_1) + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \{G^2(q)\}^\omega \Gamma^\omega(k; q) f_c(\vec{q}) \right\}$$

qui est la première identité de Ward cherchée. (4.2-18)

De manière similaire, calculons $\bar{E}_c(k_1; k_3)$. La différence avec $\bar{F}_c$ provient de la substitution $c \leftrightarrow j_c$.

Mais (4.2-3) $\rightarrow \frac{i}{k} d_t c(\vec{k}, t) = \hat{k} \cdot \vec{j}_c(\vec{k}, t)$

D'autre part, de (4.2-4) nous avons:

$$\begin{aligned} d_t c(\vec{k}, t) &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_c(\vec{q}, \vec{k}) \left\{ \dot{a}_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}+\vec{k}} + a_{\vec{q}}^+ \dot{a}_{\vec{q}+\vec{k}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_c(\vec{q}, \vec{k}) i \left\{ \omega(\vec{q}) - \omega(\vec{q}+\vec{k}) \right\} a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}+\vec{k}} \end{aligned} \quad (4.2-19)$$

car $a_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}} t} a_{\vec{k}}$

En posant $\vec{g}_c(\vec{q}, \vec{k}) = f_c(\vec{q}, \vec{k}) \left\{ \frac{\omega(\vec{k}+\vec{q}) - \omega(\vec{q})}{k} \right\}$ (4.2-20)

et en remarquant que $\lim_{k \rightarrow 0} \vec{g}_c(\vec{q}, \vec{k}) = f_c(\vec{q}) \vec{v}(\vec{q})$ (4.2-21)

où $\vec{v}(\vec{q})$ est la vitesse de groupe, nous pouvons écrire de manière similaire à $\vec{F}_c$:

$$\begin{aligned} \lim_{k_3 \rightarrow 0} \lim_{\omega_3 \rightarrow 0} \vec{E}_c(k_1, k_3) &= \left\{ G^2(k_1) \right\}^k \left\{ f_c(\vec{k}_1) \vec{v}(\vec{k}_1) + \right. \\ &\quad \left. + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ G^2(q) \right\}^k \Gamma^k(k_1, q) f_c(\vec{q}) \vec{v}(\vec{q}) \right\} \end{aligned} \quad (4.2-22)$$

d'où, en comparant avec (4.2-17) :

$$\begin{aligned} f_c(\vec{k}_1) \frac{\partial G(k_1)}{\partial k_1} &= - \left\{ G^2(k_1) \right\}^k \left\{ f_c(\vec{k}_1) \vec{v}(\vec{k}_1) + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ G^2(q) \right\}^k \right. \\ &\quad \left. \cdot \Gamma^k(k_1, q) f_c(\vec{q}) \vec{v}(\vec{q}) \right\} \end{aligned}$$

qui est la seconde identité de Ward cherchée.

(4.2-23)

Remarquons que la dérivation de ces identités a été faite dans le cadre des fonctions de Green à temps réels. Il est cependant tout à fait possible de les dériver dans le cadre des fonctions à temps imaginaires, où elles auront une forme analogue.

Particularisons (4.2-18) et (4.2-23):

A. Conservation du nombre de particules.

Dans ce cas: $f_c(\vec{q}, \vec{k}) = 1$ d'où:

$$\frac{\partial G(k_1)}{\partial \omega_1} = - \left\{ G^2(k_1) \right\}^\omega \left\{ 1 + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ G^2(q) \right\}^\omega \Gamma^\omega(k_1, q) \right\} \quad (4.2-24)$$

$$\frac{\partial G(k_1)}{\partial \vec{k}_1} = - \left\{ G^2(k_1) \right\}^k \left\{ \vec{v}(\vec{k}_1) + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ G^2(q) \right\}^k \Gamma^k(k_1, q) \vec{v}(\vec{q}) \right\} \quad (4.2-25)$$

B. Conservation de l'impulsion totale.

$$f_c(\vec{q}, \vec{k}) = \vec{q} + \frac{\vec{k}}{2} \quad \text{d'où:}$$

$$\vec{k}_1 \frac{\partial G(k_1)}{\partial \omega_1} = - \left\{ G^2(k_1) \right\}^\omega \left\{ \vec{k}_1 + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \vec{q} \left\{ G^2(q) \right\}^\omega \Gamma^\omega(k_1, q) \right\} \quad (4.2-26)$$

$$\vec{k}_1 \frac{\partial G(k_1)}{\partial \vec{k}_1} = - \left\{ G^2(k_1) \right\}^k \left\{ \vec{k}_1 \vec{v}(\vec{k}_1) + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \vec{q} \vec{v}(\vec{q}) \left\{ G^2(q) \right\}^k \Gamma^k(k_1, q) \right\} \quad (4.2-27)$$

C. Conservation de l'énergie.

L'équation de continuité à satisfaire est de la forme:

$$\partial_t h(\vec{x}, t) + \text{div } \vec{s}(\vec{x}, t) = 0$$

Mais en général, $h(\vec{x}, t)$ n'est pas une fonction quadratique dans les opérateurs de création et d'annihilation. D'autres termes d'ordres supérieurs s'ajoutent. Aussi, si la méthode reste parfaitement valable, le problème est compliqué par le fait que lors de l'évaluation de E_c , il va apparaître des fonctions de Green à quatre points ou plus. Donc, on obtiendra une relation reliant la première dérivée de la fonction de Green à une particule à une fonctionnelle dépendant des diverses fonctions vertex Γ_n associées aux fonctions de Green à n points .

IV.2.2. IDENTITES DE WARD THERMODYNAMIQUES.

La première étape consiste à établir des règles de somme thermodynamiques. Nous établirons ces règles suivant la méthode proposée par C.P. Enz [1-26].

Considérons un système d'observables B_i pour notre assemblée de bosons.

A chaque B_i est associé la densité $b_i(\vec{r})$:

$$B_i = \int d^3\vec{r} \, b_i(\vec{r}) \quad (4.2-28)$$

Soit l'opérateur: $\mathcal{H} = H - \sum_j \phi_j B_j \quad (4.2-29)$

H étant l'hamiltonien du système et la somme portant sur les B_j conservés, c'est-à-dire tels que $[\mathcal{H}, B_j]_- = 0$

Les ϕ_j sont les paramètres de Lagrange associés. L'état d'équilibre du système étant donné par les ϕ_j , on peut considérer l'ensemble des B_j comme un système complet d'observables thermodynamiques.

La représentation de Heisenberg étant définie par:

$$B_j(t) = e^{i\mathcal{H}t} B_j e^{-i\mathcal{H}t}$$

et la moyenne d'une observable par $\langle B_j \rangle = \text{tr}(\rho B_j)$

où $\rho = e^{-\beta(\mathcal{H} - \Omega)} : \text{tr} \rho = 1$

définissons les fonctions de corrélation suivantes: (l'homogénéité du temps découlant de la moyenne à l'équilibre)

$$\delta b_i(\vec{r}) = b_i(\vec{r}) - \langle b_i(\vec{r}) \rangle$$

$$\tilde{\chi}_{ij}''(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = \frac{1}{2} \langle [b_i(\vec{r}, t), b_j(\vec{r}', t')]_- \rangle \quad (4.2-30)$$

= fonction de dissipation.

$$\tilde{\chi}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = 2i\theta(t-t') \tilde{\chi}_{ij}''(\vec{r}, \vec{r}', t-t') - G_{b_i(\vec{r}) b_j(\vec{r}')}^{\text{ret}}(t-t') \quad (4.2-31)$$

= fonction réponse ou fonction de Green retardée.

$$\tilde{S}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = \langle \delta b_i(\vec{r}, t) \delta b_j(\vec{r}', t') \rangle \quad (4.2-32)$$

= fonction de corrélation.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') &= \frac{1}{2} \langle [\delta b_i(\vec{r}, t), \delta b_j(\vec{r}', t')]_+ \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ \tilde{S}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') + \tilde{S}_{ji}(\vec{r}', \vec{r}, t'-t) \} \end{aligned} \quad (4.2-33)$$

= fonction de corrélation symétrisée.

Le théorème de fluctuation-dissipation (TDF) relie ces fonctions de corrélation entre elles: ($\beta = 1/k_B T$)

$$\Phi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \coth \frac{\beta \omega}{2} \chi_{ij}''(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \quad (4.2-34)$$

D'autre part, la fonction réponse satisfait les relations de dispersion habituelles et l'on a:

$$\chi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; z) = \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi_{ij}''(\vec{r}, \vec{r}'; \omega')}{\omega' - z} \quad (4.2-35)$$

on voit que:

$$\chi_{ij}''(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \text{Im} \chi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega + i\epsilon) \quad (4.2-36)$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} &= \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left\{ e^{\beta \Omega} \text{Tr} \left(e^{-\beta (H - \sum_p \phi_p B_p)} b_i(\vec{r}) \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial (e^{\beta \Omega})}{\partial \phi_j} \text{Tr} \left(e^{-\beta (H - \sum_p \phi_p B_p)} b_i(\vec{r}) \right) + \\
 &\quad + e^{\beta \Omega} \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left\{ \text{Tr} e^{-\beta (H - \sum_p \phi_p B_p)} b_i(\vec{r}) \right\} \\
 &= \frac{\partial (e^{\beta \Omega})}{\partial \phi_j} e^{\beta \Omega} \langle b_i(\vec{r}) \rangle + \beta \langle B_j b_i(\vec{r}) \rangle \quad (4.2-37)
 \end{aligned}$$

Mais : $\frac{\partial}{\partial \phi_j} \text{Tr} \rho = \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left\{ e^{\beta \Omega} \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} \right\} = 0$

d'où : $\frac{\partial (e^{\beta \Omega})}{\partial \phi_j} e^{-\beta \Omega} = -\beta \langle B_j \rangle$

(4.2-37) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} &= -\beta \langle B_j \rangle \langle b_i(\vec{r}) \rangle + \beta \langle B_j b_i(\vec{r}) \rangle \\
 &= \beta \langle \delta B_j \delta b_i(\vec{r}) \rangle = \beta \langle \delta b_i(\vec{r}) \delta B_j \rangle = \beta \int d^3 \vec{r}' \tilde{S}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', 0) \\
 &= \beta \int d^3 \vec{r}' \tilde{S}_{ji}(\vec{r}', \vec{r}, 0) = \beta \int d^3 \vec{r}' \tilde{\Phi}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', 0) \quad (4.2-38)
 \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de fluctuation-dissipation :

$$\frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} = \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\beta}{2} \coth \frac{\beta \omega}{2} \int d^3 \vec{r}' \chi''_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \quad (4.2-39)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \int d^3 \vec{r}' \chi''_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{1}{2} \int dt e^{i\omega t} \langle [b_i(\vec{r}, t), B_j]_- \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int dt e^{i\omega t} \langle [b_i(\vec{r}), B_j(-t)]_- \rangle - 2\pi \delta(\omega) \int \tilde{\chi}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', 0) d^3 \vec{r}' \end{aligned} \quad (4.2-40)$$

car les B_j sont indépendants du temps puisque constante du mouvement. En retournant à (4.2-39), la présence de la fonction $\delta(\omega)$ nous permet de remplacer $\coth \beta\omega/2$ par son comportement asymptotique pour $\omega \rightarrow 0$ ($\coth x \rightarrow 1/x, x \rightarrow 0$) d'où:

$$\frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} = \int \frac{d\omega}{\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\chi''_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)}{\omega} \quad (4.2-41)$$

Nous obtenons ainsi la règle de somme thermodynamique cherchée. Elle relie la dérivée de la moyenne de $b_i(\vec{r})$ par rapport à la variable thermodynamique ϕ_j au moment d'ordre -1 de la fonction de dissipation.

Les conditions de validité de cette relation sont celles du théorème de fluctuation-dissipation. La description n'est plus valable si le système présente un ordre à longue portée comme c'est le cas au voisinage d'une transition de phase ou pour un système avec phase condensée. Par contre, le formalisme est valable pour traiter par exemple un gaz de phonons en interactions, ce qui est le cas dans notre description de l'hélium en termes de variables collectives.

Passons maintenant à l'établissement des identités de Ward thermodynamiques. Eu égard à la relation de dispersion (4.2-35), nous pouvons écrire (4.2-41) sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} &= \int d^3 \vec{r}' \chi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', 0) = \int dt' d^3 \vec{r}' \tilde{\chi}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t') = \\ &= - \int d^3 \vec{r}' dt' G_{b_i(\vec{r}) b_j(\vec{r}')}^{\text{ret}} \end{aligned} \quad (4.2-42)$$

Mais nous savons que la fonction retardée à temps réels est reliée à la fonction chronologique à temps imaginaires par: [2.3-2,14]

$$G^{\text{ret}}(\vec{k}, \omega) = G(\vec{k}, \omega + i\delta) \quad (4.2-43)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \frac{\partial \langle b_i(\vec{r}) \rangle}{\partial \phi_j} &= - \int d^3 \vec{r}' G_{b_i(\vec{r}) b_j(\vec{r}')}^{\text{ret}}(\omega=0) \\ &= - \int_0^\beta d\tau' d^3 \vec{r}' G_{b_i(\vec{r}) b_j(\vec{r}')}(\tau') \end{aligned} \quad (4.2-44)$$

$$\text{soit: } \frac{\partial \langle b_i(\vec{k}) \rangle}{\partial \phi_j} = - \int_0^\beta d\tau' G_{b_i(\vec{k}) b_j(\vec{k}'=0)}(\tau') \quad (4.2-45)$$

$$\text{Choisissons alors: } b_i(\vec{k}, \tau) = \hat{\tau} \{ a_{\vec{k}}(-i\tau) a_{\vec{k}}^+(0) \}$$

$$\langle b_i(\vec{k}, \tau) \rangle = \langle \hat{\tau} \{ a_{\vec{k}}(-i\tau) a_{\vec{k}}^+(0) \} \rangle = G(\vec{k}, \tau) \quad (4.2-46)$$

= fonction de Green à une particule et temps imaginaires.

Nous avons donc:

$$\frac{\partial G(\vec{k}, \tau)}{\partial \phi_j} = - \int_0^\beta d\tau' \langle \hat{\tau} \{ a_{\vec{k}}(-i\tau) a_{\vec{k}}^+(0) b_j(\vec{k}'=0, -i\tau') \} \rangle \quad (4.2-47)$$

Supposons alors que $b_j(\vec{k})$ est de la forme:

$$b_j(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_j(\vec{q}, \vec{k}) a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}+\vec{k}} d^3 \vec{q} \quad (4.2-48)$$

et que le système est légèrement inhomogène dans l'espace, les paramètres de Lagrange devenant une fonction de la position tout en restant statiques.

Dans ce cas, (4.2-29) s'écrit:

$$\mathcal{H} = H - \sum_j \int d^3\vec{r} \varphi_j(\vec{r}) b_j(\vec{r}) = H - \sum_{j\vec{r}} \varphi_j(-\vec{r}) b_j(\vec{r})$$

$$\text{et } \phi_j = \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \varphi_j(\vec{r})$$

On peut alors écrire (4.3-47) sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{k}, \tau)}{\partial \phi_j} &= \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{k}, \tau)}{\partial \varphi_j(-\vec{r})} = \\ &= - \lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \lim_{\omega_l \rightarrow 0} \int_0^\beta d\tau' e^{-i\omega_l \tau'} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} f_j(\vec{q}, \vec{r}) \cdot \\ &\quad \cdot \langle \hat{T} \{ a_{\vec{k}}(-i\tau) a_{\vec{k}}^+(0) a_{\vec{q}}^+(-i\tau') a_{\vec{q}+\vec{r}}(-i\tau') \} \rangle \end{aligned} \quad (4.2-49)$$

Compte tenu des propriétés de la transformée de Fourier des fonctions de Green à temps imaginaires [2.3,2,14] :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\tau) &= \beta^{-1} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\omega_n) \\ \mathcal{G}(\omega_n) &= \int_0^\beta e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.2-50)$$

avec $\omega_n = 2n\pi\beta$ pour les bosons,

et en définissant la fonction de Green à deux particules en temps imaginaires ainsi que son expression à l'aide du quadrivertex de manière similaire

aux temps réels (c.f. 4.2-11), c'est-à-dire:

$$\bar{G}^{\text{II}}(k_1, k_2; k_3; k_1 + k_2 - k_3) = G(k_1)G(k_2)(2\pi)^3 \beta \{ \delta(k_1 - k_3) + \delta(k_2 - k_3) \} \\ + G(k_1)G(k_2)G(k_3)G(k_1 + k_2 - k_3) \mathcal{T}(k_1, k_2; k_3; k_1 + k_2 - k_3) \quad (4.2-51)$$

où $k = (\vec{k}, \omega_k)$, nous pouvons écrire (4.2-29) en transformée de Fourier sous la forme:

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \phi_j} = - \lim_{\vec{t} \rightarrow 0} \lim_{\omega_t \rightarrow 0} \beta^{-1} \int_{\omega_q} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_j(\vec{q}, \vec{t}) G^{\text{II}}(k; q + l; k + l; q) \quad (4.2-52)$$

En étendant les définitions des limites (4.2-12) aux temps imaginaires et à l'aide de (4.2-51), (4.2-52) devient:

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \phi_j} = - \{ G^2(k) \}^k \left[f_j(\vec{k}) + \beta^{-1} \int_{\omega_q} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_j(\vec{q}) \{ G^2(q) \}^k \mathcal{T}^k(k, q) \right] \quad (4.2-53)$$

qui est l'identité de Ward cherchée.

Dans la limite $T \rightarrow 0$, (4.2-53) s'écrit encore:

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \phi_j} = - \{ G^2(k) \}^k \left[f_j(\vec{k}) + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} f_j(\vec{q}) \{ G^2(q) \}^k \mathcal{T}^k(k, q) \right] \quad (4.2-54)$$

Particularisons (4.2-53):

A. Conservation du nombre de particules.

$\phi_j = \mu$ = potentiel chimique

$b_j(\vec{k}) = n(\vec{k})$ = densité de particules , $f_j(\vec{q}, \vec{k}) = 1$

d'où:

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \mu} = - \{G^2(k)\}^k \left[1 + \beta^{-1} \int_{\omega_q} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \{G^2(q)\}^k \mathcal{T}^k(k, q) \right] \quad (4.2-55)$$

B. Conservation de l'impulsion.

$\phi_j = \vec{v}$ = vitesse de drift.

$b_j(\vec{k}) = \vec{j}_k$ = courant de particules

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \vec{v}} = - \{G^2(k)\}^k \left[\vec{k} + \beta^{-1} \int_{\omega_q} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \vec{q} \{G^2(q)\}^k \mathcal{T}^k(k, q) \right] \quad (4.2-56)$$

Pour $T = 0$, on a:

$$\frac{\partial G(k)}{\partial \vec{v}} = - \{G^2(k)\}^k \left[\vec{k} + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \vec{q} \{G^2(q)\}^k \mathcal{T}^k(k, q) \right] \quad (4.2-57)$$

IV.3. CALCUL DE LA CHALEUR SPECIFIQUE ET DE LA VITESSE DU SON.

Nous allons calculer dans le cadre de notre modèle collectif de l'hélium la chaleur spécifique et la vitesse du son dans la limite $T \rightarrow 0$. Comme nous l'avons vu au § 3.5, dans l'approximation qui consiste à ne retenir que les pôles de type phononique, le nombre de phonons était conservé même à $T \neq 0$. Il n'y a donc pas de propagateur phononique anormal, ce qui va nous permettre de calculer la chaleur spécifique de notre gaz de phonons relativement simplement.

Considérons un gaz de phonons muni d'une vitesse de drift $\vec{v}$.

Le nouvel hamiltonien que nous considérons s'écrit:

$$\mathcal{H}_{\vec{v}} = H - \vec{v} \cdot \vec{P} \quad (4.3-1)$$

où $\vec{P}$ est l'impulsion totale du système.

D'autre part, la thermodynamique nous donne la relation de Maxwell suivante:

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial T} \right)_{\vec{v}} = \left(\frac{\partial s}{\partial \vec{v}} \right)_T \quad (4.3-2)$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion par unité de volume.

s est l'entropie par unité de volume,

L'idée est de calculer s en exprimant p en termes du propagateur phononique

$$g(\vec{q}, \tau) = \langle \hat{T} \{ A_{\vec{q}}(-i\tau) A_{-\vec{q}}^+(0) \} \rangle \quad (4.3-3)$$

En mettant explicitement en évidence la dépendance en température des propagateurs, la densité volumique d'impulsion s'exprime en fonction du propagateur de la manière suivante:

$$\vec{p}(\vec{v}; T) = \lim_{T \rightarrow 0} T \int_{\omega_q} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} g(T, \vec{q}, \omega_q) \vec{q} e^{i\omega_q T} \quad (4.3-4)$$

D'autre part, l'équation de Dyson s'écrit, avec $q = (\vec{q}, \omega_q)$:

$$g^{-1}(T, q) = g^{(0)-1}(q) - \Pi(T, q) \quad (4.3-5)$$

car $g^{(0)}$ ne va dépendre que de la température qu'à travers les valeurs discrètes de ω_q . Dans la limite $T \rightarrow 0$, (4.3-5) devient:

$$g^{-1}(q) = g^{(0)-1}(q) - \Pi(0, q)$$

soit en combinant avec (4.3-5):

$$g^{-1}(T, q) = g^{-1}(q) - \{ \Pi(T, q) - \Pi(0, q) \} \quad (4.3-6)$$

Le problème est alors de calculer la contribution du plus bas ordre en température de $\delta \Pi(T, q) = \Pi(T, q) - \Pi(0, q)$

Pour cela, considérons deux diagrammes semblables contribuant à $\Pi(T, q)$ et $\Pi(0, q)$. Soient $\Pi_1(T, q)$ et $\Pi_1(0, q)$ ces diagrammes. Les expressions associées à ces deux diagrammes différeront pour deux raisons:

- i) Le fait que $\Pi_1(T, q)$ contient des propagateurs renormalisés avec leur dépendance en température.
- ii) Le fait que pour T finie on a une sommation sur les fréquences discrètes, alors que pour $T = 0$ on a une intégrale sur les fréquences.

La différence au plus bas ordre en T sera obtenus en ne considérant la différence $\delta g(T, q) = g(T, q) - g(0, q)$ que pour un seul propagateur dans le diagramme. Soit $g(T, p_i)$ ce propagateur. La contribution corres-

pondante à $\delta\pi_i$ sera alors:

$$\delta\pi_i(T, q) = \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3} \left[\left\{ \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \delta g(T, p_i) + \left(T \sum_{\omega_i} - \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \right) g(T, p_i) \right\} \cdot \frac{\delta\pi_i(T, q)}{\delta g(T, p_i)} \right] \quad (4.3-7)$$

au plus bas ordre en T , on peut remplacer $g(T, p_i)$ par $g(0, p_i)$ dans (4.3-7). D'autre part:

$$\frac{\delta\pi_i(T, q)}{\delta g(T, p_i)} = \mathcal{T}_1^{(1)}(T, q, p_i) = \text{partie de quadrivertex irréductible associé à } \pi_i \text{ . [2.3-2] .}$$

En sommant sur tous les diagrammes de self énergie irréductibles et en effectuant la variation par rapport à chacun des propagateurs à l'intérieur d'un diagramme, on obtient:

$$\frac{\delta\pi(T, q)}{\delta g(T, p_i)} = \mathcal{T}^{(1)}(T, q, p_i) \quad (4.3-8)$$

En remplaçant $\mathcal{T}^{(1)}(T, q, p_i)$ par $\mathcal{T}^{(1)}(0, q, p_i)$ dans l'expression de $\delta\pi(T, q)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \delta\pi(T, q) = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{T}^{(1)}(0, p, q) \{ g(T, p) - g(0, p) \} + \\ & + \left\{ T \sum_{\omega_p} - \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \mathcal{T}^{(1)}(0, q, p) g(0, p) \end{aligned} \quad (4.3-9)$$

D'autre part, de (4.3-6):

$$g(T, p) - g(0, p) = \delta\pi(T, p) g(T, p) g(0, p) \quad (4.3-10)$$

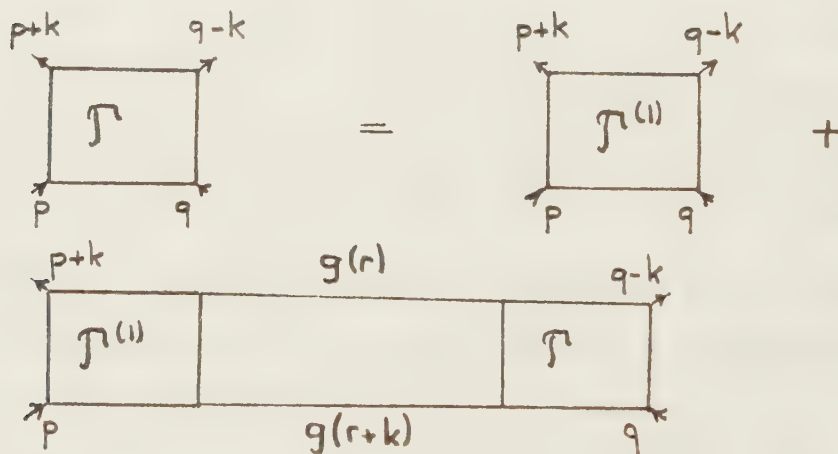
et en remplaçant dans (4.3-9)

$$\delta\pi(T, q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} T^{(1)}(0, q, p) g(T, p) g(0, q) \delta\pi(T, p) + \left\{ T \int_{\omega_p} - \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} T^{(1)}(0, q, p) g(0, p) \quad (4.3-11)$$

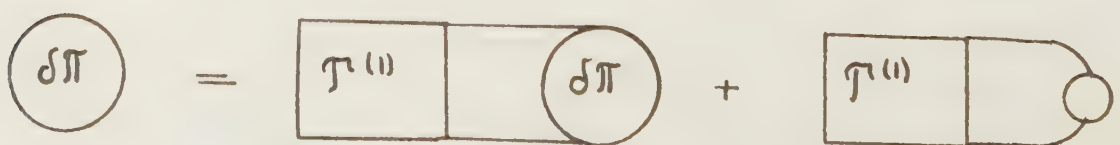
D'autre part, le quadri vertex irréductible $T^{(1)}$ est relié au quadrivertex T par l'équation de Bethe-Salpeter [2.3-2,12]. Pour $T = 0$:

$$T(p, q, k) = T^{(1)}(p, q, k) + \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} T^{(1)}(p, r+k, k) g(r) g(r+k) T(r, q, k) \quad (4.3-12)$$

soit graphiquement:



Avec la notation $\bigcirc \rightarrow \left\{ T \int_{\omega_p} - \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \right\}$, l'équation (4.3-11) peut s'écrire graphiquement:



on peut alors itérer, et l'on obtient, compte tenu de (4.3-12) :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\delta\pi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathcal{T}^{(1)} & & \mathcal{T}^{(1)} & & \mathcal{T}^{(1)} \\ \hline \end{array}}_{n \text{ fois}} \textcircled{} \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{T} & \textcircled{} \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\delta\pi(\mathcal{T}, q) = \left\{ \mathcal{T} \sum_{\omega_p} - \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \mathcal{T}(0, p, q) g(0, p) \quad (4.3-13)$$

En première approximation, (4.3-10) donne:

$$g(\mathcal{T}, q) = g(0, q) + \delta\pi(\mathcal{T}, q) g^2(0, q)$$

d'où, en remplaçant $\delta\pi(\mathcal{T}, q)$ par son expression (4.4-13) :

$$g(\mathcal{T}, q) = g(0, q) + g^2(0, q) \left\{ \mathcal{T} \sum_{\omega_p} - \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \mathcal{T}(0, q, p) g(0, p) \quad (4.3-14)$$

En retournant à (4.3-4) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}
 p(\vec{v}, \mathcal{T}) - p(\vec{v}, 0) &= \left\{ \mathcal{T} \sum_{\omega_q} - \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(0, q) \vec{q} + \\
 &+ \mathcal{T} \sum_{\omega_q} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \vec{q} g(0, q) \left\{ \mathcal{T} \sum_{\omega_r} - \int \frac{d\omega_r}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{r}}{(2\pi)^3} \mathcal{T}(0, q, r) g(0, r)
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la propriété de symétrie $\mathcal{T}(0, q, r) = \mathcal{T}(0, r, q)$ nous pouvons écrire:

$$\vec{p}(\vec{v}, T) - \vec{p}(\vec{v}, 0) = \left\{ T \sum_{\omega_q} - \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(0, q) \cdot \left\{ \vec{q} + T \sum_{\omega_r} \int \frac{d^3 \vec{r}}{(2\pi)^3} \vec{r} g^2(0, r) \mathcal{T}(0, r, q) \right\}$$

soit au plus bas ordre en T:

$$\vec{p}(\vec{v}, T) - \vec{p}(\vec{v}, 0) = \left\{ T \sum_{\omega_q} - \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(0, q) \cdot \left\{ \vec{q} + \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \vec{r} g^2(0, r) \mathcal{T}(0, r, q) \right\} \quad (4.3-15)$$

selon l'identité de Ward (4.2-56) le dernier crochet dans l'équation ci-dessus vaut: $\partial g^{-1}(q) / \partial \vec{v}$

Donc:

$$\begin{aligned} \vec{p}(\vec{v}, T) - \vec{p}(\vec{v}, 0) &= \left\{ T \sum_{\omega_q} - \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} g(0, q) \frac{\partial g^{-1}(0, q)}{\partial \vec{v}} \\ &= \left\{ T \sum_{\omega_q} - \int \frac{d\omega_q}{2\pi} \right\} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \ln g^{-1}(0, q) \end{aligned} \quad (4.3-16)$$

En différentiant par rapport à T pour $\vec{v} = \text{cte}$:

$$\frac{\partial \vec{p}(\vec{v}, T)}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \sum_{\omega_q} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \ln g(0, q) \right\}$$

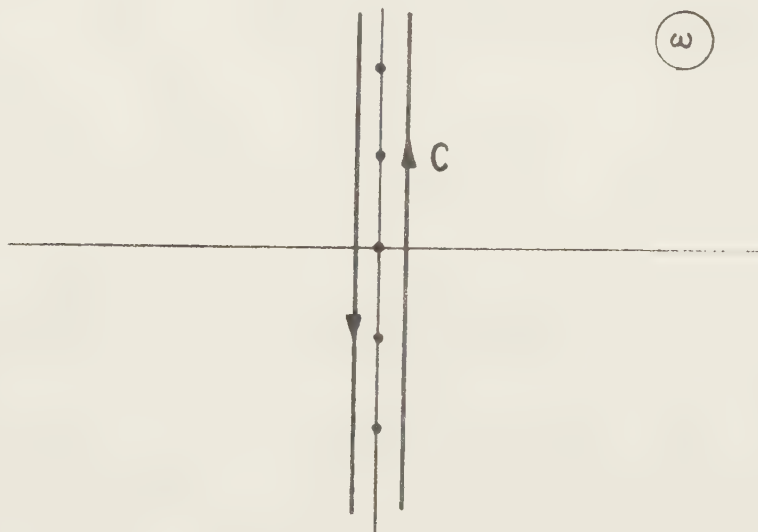
d'où en identifiant avec (4.3-2):

$$s(T) = - \frac{d}{dT} \left\{ T \sum_{\omega_q} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \ln g(0, q) \right\} \quad (4.3-17)$$

Pour calculer (4.3-17) utilisons tout d'abord l'identité [2.3-12 p.108] :

$$T \sum_{\omega_q} F(\omega_q) = \frac{1}{2i\pi} \int_C F(\omega) f(\omega) d\omega \quad (4.3-18)$$

où C est le contour ci-dessous dans le plan complexe ω .



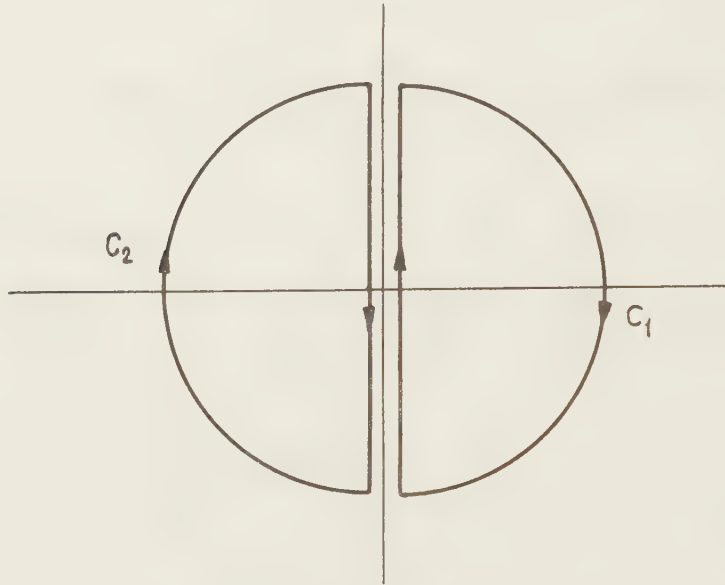
et $f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$ la distribution de Bose. Calculons:

$$h(T, \vec{q}) = T \sum_{\omega_q} \ln g(0, q) - \frac{1}{2i\pi} \int_C f(\omega) \ln g(0, \vec{q}, \omega) d\omega \quad (4.3-19)$$

La présence de $f(\omega)$ nous assure que dans la limite des petits T, seuls les petits ω vont contribuer à l'intégrale. Nous pouvons donc écrire, eu égard à (3.5-13) :

$$g(0, \vec{q}, z) = \frac{1}{z - cq} \quad z \text{ complexe.} \quad (4.3-20)$$

D'autre part, la présence de $f(w)$ dans (4.3-19) nous permet de compléter le contour C par deux arcs de cercle qui ne contribueront pas dans la limite où leur rayon tend vers l'infini. Donc $C \rightarrow C_1 + C_2$



En choisissant la détermination du logarithme de manière à ce que la coupure soit sur l'axe réel positif, l'intégrand de (4.3-19) est analytique dans le domaine entouré par C_2 . Donc l'intégrale sur ce contour ne contribue pas. Dans le domaine C_1 la fonction étant analytique hors de la coupure sur l'axe réel, on peut déformer le contour C_1 en C'_1 :



d'où :

$$\begin{aligned} h(T, \vec{q}) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty f(\omega) \ln \frac{g(0, \vec{q}, \omega + i\delta)}{g(0, \vec{q}, \omega - i\delta)} d\omega \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty f(\omega) \ln \left(\frac{\omega - cq - i\delta}{\omega - cq + i\delta} \right) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} h(T, \vec{q}) &= \frac{1}{2i\pi} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\infty dq d\omega q^2 f(\omega) \ln \left(\frac{\omega - cq - i\delta}{\omega - cq + i\delta} \right) \\ &= - \int \frac{d\Omega}{(2\pi c)^3} \int_0^\infty f(\omega) \frac{\omega^3}{3} d\omega = - \frac{1}{6\pi^2 c^3} \int_0^\infty f(\omega) \omega^3 d\omega \end{aligned}$$

mais: $\int_0^\infty f(\omega) \omega^3 d\omega = \beta^{-4} \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} = \beta^{-4} \frac{\pi^4}{15}$

d'où: $\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} h(T, \vec{q}) = - \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{90 c^3}$

et (4.3-17) donne:
$$s(T) = \frac{2\pi^2 k_B^4}{45 c^3} T^3 \quad (4.3-21)$$

La chaleur spécifique à volume constant c_Ω est donnée par:

$$c_\Omega = T \left(\partial s / \partial T \right)_\Omega$$

d'où:
$$c_\Omega(T) = \frac{2\pi^2 k_B^4}{15 c^3} T^3 \quad (4.3-22)$$

Nous obtenons donc l'intéressant résultat: au plus bas ordre en température, la chaleur spécifique d'un gaz de phonons en interactions calculée à tous

les ordres de l'interaction est la même que celle d'un gaz de phonons libre. Un résultat similaire a déjà été établi dans le cadre des cristaux diélectriques par Götze [2.3-8] en utilisant une méthode fonctionnelle et par Götze Wagner [4-9] dans le cadre d'une théorie microscopique des liquides de Bose.

Connaissant la chaleur spécifique, il est facile de calculer la vitesse du son dans la limite de Nernst à l'aide des relations thermodynamiques. Comme l'a déjà montré C.P. Enz [1-29, 3.5-2, 4-10] une dépendance de la chaleur spécifique en T^3 correspond à une dépendance de la vitesse du son en T^4 . Rappelons les principales étapes du calcul:

Avec ϵ = entropie par unité de masse = S/ρ , ρ = densité de masse, c_p et c_Ω chaleurs spécifiques à pression et volume constant par unité de masse, nous avons les relations thermodynamiques suivantes:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T = \text{coefficient d'expansion.} \quad (4.3-24)$$

$$\chi_{T,S} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} = \text{compressibilité isotherme ou adiabatique} \quad (4.3-25)$$

$$\text{On a alors: } \frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{c_p}{c_\Omega} \quad (4.3-26)$$

$$\text{et } \Gamma = \frac{c_p}{c_\Omega} - 1 = \frac{T \alpha^2}{\rho c_\Omega \chi_T} \quad (4.3-27)$$

D'autre part, la vitesse du son c est donnée par:

$$c^2 = \rho \chi_s \quad (4.3-28)$$

Dans la limite de Nernst, (4.3-21) donne:

$$\epsilon = \frac{2\pi^2 k_B^4}{45 c^3 \rho} T^3 = A(\rho) T^3 \quad (4.3-29)$$

(4.3-24 à 29) impliquent que
$$r = \frac{\rho^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\right)^2 c^2}{3 A(\rho)} T^4 \quad (4.3-30)$$

Nous voyons que dans la limite de Nernst, $r \rightarrow 0$, les vitesses du son isotherme et adiabatique sont égales.

D'autre part de (4.3-25,28), nous obtenons: $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$

$$\left(\frac{\partial c^2}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\right)_\rho = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial \Omega}\right)_\rho = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial \Omega}$$

mais :
$$\frac{\partial^2 p}{\partial T \partial \Omega} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \Omega^2}\right)_T$$

donc:
$$2c \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_\rho = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \Omega^2}\right)_T = -\rho^2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2}\right)_T \quad (4.3-31)$$

En remplaçant ϵ par sa valeur, il vient:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_\rho = -A(\rho) T^3$$

d'où:
$$\underline{\delta c(T) = c(T) - c(0) = -\frac{2\pi^2 k_B^4}{45 c^4 \rho} T^4} \quad (4.3-32)$$

Nous obtenons bien la dépendance cherchée : $\delta c(T) = a T^4$

Si ce résultat donne la bonne dépendance en température, il ne permet pas néanmoins d'expliquer les résultats expérimentaux. En effet:

- a) Le facteur a dans $\delta_c(T) = aT^4$ ne correspond pas du tout avec l'expérience $[1-29, 3.1-12]$.
- b) Il n'y a pas de dépendance en fréquence de $\delta_c(T)$.

Tout le problème est de savoir si les relations thermodynamiques utilisées sont significatives dans le domaine où les expériences sont réalisées.

L'emploi de relations thermodynamiques pour des systèmes à l'équilibre ne nous permet évidemment pas d'obtenir la dépendance en fréquence de la vitesse du son. Donc le point b) est facilement compréhensible. Qu'en est-il pour a) ?

Le domaine dans lequel les expériences $[4-3]$ sont réalisées empiète à la fois sur le domaine hydrodynamique et sur le domaine sans collisions $[3.1-12]$. Dans le domaine hydrodynamique, le système est caractérisé par un équilibre thermique local et une onde sonore adiabatique. Dans la limite de Nernst ($T \rightarrow 0$ et $\omega\tau_{n1} < 1$), sons isotherme et adiabatique sont confondus. Dans cette limite, les résultats obtenus thermodynamiquement sont tout à fait significatifs comme le confirme le calcul de la constante de Grüneisen $[4-10]$. La raison du désaccord entre l'expérience et la théorie concernant le facteur a n'est donc pas encore comprise.

C H A P I T R E V

C o n c l u s i o n s .

Représenter l'hélium liquide par un gaz de phonons en interactions se montre particulièrement simple pour le calcul de divers effets. Pour mieux comprendre le contenu et les limitations du modèle hydrodynamique de Landau, il nous a paru intéressant d'étudier une théorie de l'hélium liquide en termes de variables collectives, en partant d'une description microscopique dans laquelle le caractère bosonique des atomes apparaît clairement.

Les calculs du spectre des excitations de grande longueur d'onde (§2.3) et du trivertex effectif (§3.4) nous ont montré que sous les deux hypothèses suivantes:

- i) on se place dans la limite isotherme (statique $\omega \rightarrow 0$ puis homogène $k \rightarrow 0$).
- ii) on néglige les singularités des fonctions de corrélation autres que les pôles de type phononique (développement en série des self énergies).

on obtient les résultats suivants:

- a) Les excitations élémentaires de grande longueur d'onde sont des phonons qui se propagent à la vitesse macroscopique du son c .
- b) Le trivertex phononique effectif est le même que celui de la théorie de Landau.

Donc, nous en concluons que le modèle hydrodynamique de Landau est un modèle déjà renormalisé. Les résultats obtenus à partir de la théorie de Landau ne seront équivalents à ceux d'une théorie microscopique que si les hypothèses i) et ii) sont vérifiées et si l'on écarte tous les diagrammes

qui ne contribuent qu'à renormaliser les paramètres du modèle à $T=0$.

Dans un récent article [5-1], Josephson arrive aux mêmes conclusions par une approche toute différente. Il regarde les fonctions de corrélation densité-densité, densité-courant et courant-courant, grandeurs communes au modèle de Landau et à la théorie microscopique. Ces diverses fonctions de corrélation peuvent être obtenues par dérivation d'une fonctionnelle génératrice $F(U)$. Dans le cadre du modèle de Landau on peut énoncer de manière standard les règles de construction de $F(U)$. $F(U)$ est alors formé d'un ensemble $\mathcal{X}$ de graphes. L'idée de Josephson est de construire $F(U)$ dans le cadre d'une théorie microscopique à $T=0$ et de comparer avec le résultat de la théorie de Landau. Il apparaît alors plus commode d'étudier microscopiquement non pas $F(U)$, mais une fonctionnelle $L_2(\xi, U)$ dont $F(U)$ est la valeur stationnaire par rapport à ξ . $L_2(\xi, U)$ est définie par une famille de graphes. Sa valeur stationnaire $F(U)$ s'exprime sous la forme d'une famille de graphes particuliers $\mathcal{X}_0$ ayant une structure dite "d'arbres de Cayley". Pour pouvoir comparer les deux développements de $F(U)$ il faut encore expliciter, les vertex et les propagateurs entrant dans les "arbres de Cayley". Pour ceci, Josephson relie l'énergie fondamentale exacte du système de bosons en interactions à la valeur stationnaire d'une nouvelle fonctionnelle L_3 obtenue de L_2 par changement de variables. Josephson suppose alors que tous les diagrammes de L_3 sont développables en puissances de k et ω ("approximation du pôle") et ne retient que les termes du premier ordre dans le développement. Cela revient à supposer que les diverses grandeurs varient lentement dans l'espace et le temps. Une nouvelle transformation de variables permet

d'exprimer $F(U)$ comme valeur stationnaire d'une fonctionnelle L_4 qui ne dépend plus explicitement de la densité du condensé γ . En explicitant

L_4 on peut voir que les vertex et les propagateurs intervenant dans $F(U)$ sont les mêmes que ceux du modèle hydrodynamique de Landau.

Donc, en résumé, dans l'approximation du pôle et en supposant que les grandeurs varient lentement dans l'espace et le temps, Josephson montre que les diagrammes pour $F(U)$ obtenus de la théorie microscopique ne sont qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ des diagrammes pour $F(U)$ donnés par le modèle de Landau. Chaque diagramme de ce sous-ensemble possède une structure d'arbre de Cayley. Cela implique (par définition des arbres de Cayley) que ces diagrammes ne peuvent pas donner lieu à des renormalisations de vertex.

D'autre part, le calcul de l'atténuation ultrasonore au plus bas ordre en ω et T (Ch. III) nous a montré que le résultat de Pethick et Ter Haar était exact à tous les ordres de théorie de perturbation, sans faire d'approximation sur la conservation du nombre de phonons.

Enfin, l'établissement d'identités de Ward pour un gaz de phonons en interactions (Ch IV) nous a permis de mettre en évidence, dans la limite de Nernst ($T \rightarrow 0$, $\omega \tau_{rel} < 1$) une dépendance de la vitesse du son avec la température du type $\delta_c(T) \sim T^4$.

APPENDICE.

CALCUL DE LA DISPERSION POUR UN GAZ DE BOSE DILUE.

Nous considérons un système de bosons en interactions à température nulle, décrit par l'hamiltonien:

$$H = H_0 + H_{int} = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \psi^+(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \psi^+(\vec{x}) \psi^+(\vec{x}') V(\vec{x} - \vec{x}') \psi(\vec{x}') \psi(\vec{x}) \quad (A-1)$$

En séparant dans les opérateurs de champ la partie correspondant au condensé ξ_0 , nous pouvons écrire:

$$\psi(\vec{x}) = \xi_0 + \psi'(\vec{x}) \quad (A-2)$$

avec les relations de commutation :

$$[\xi_0, \xi_0^+]_- = \frac{1}{\Omega} \quad (\Omega = \text{volume du système}) \quad (A-3)$$

Dans la limite où $\Omega \rightarrow \infty$, ξ_0 et ξ_0^+ peuvent être considérés comme des nombres complexes et l'on a, dans la représentation de Heisenberg [2.3-2, Ch. V] :

$$\xi_0(t) = n_0^{1/2} e^{-i\mu t} \quad (A-4)$$

n_0 étant le nombre d'atomes dans le condensé et μ le potentiel chimique. Le fait que le condensé puisse absorber ou émettre des particules implique que le système est caractérisé par les deux fonctions de Green à deux points suivantes:

$$G(x-x') = -i \langle T \{ \psi'(x) \psi'^{\dagger}(x') \} \rangle \quad (A-5)$$

$$\hat{G}(x-x') = -\frac{i}{n_0} \langle T \{ \xi_0 \xi_0 \psi'^{\dagger}(x) \psi'^{\dagger}(x') \} \rangle$$

où $x = (\vec{x}, t)$, les opérateurs étant en représentation de Heisenberg. En passant en transformée de Fourier, avec $p = (\vec{p}, \omega)$ et compte tenu de l'invariance au renversement de l'espace et du temps, $G(p)$ et $\hat{G}(p)$, solutions de l'équation de Dyson-Beliaev, s'écrivent:

$$G(p) = - \{ \omega - \epsilon_0(\vec{p}) + \Sigma_{11}(p) - \mu \} / D(p) \quad (A-6)$$

$$\hat{G}(p) = \Sigma_{20}(p) / D(p) \quad (A-7)$$

$$\text{avec: } D(p) = \left\{ \omega - \frac{\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)}{2} \right\}^2 - \left\{ \epsilon_0(p) + \frac{\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)}{2} - \mu \right\}^2 + \Sigma_{20}^2(p) \quad (A-8)$$

où: $\epsilon_0(\vec{p})$ = énergie des particules sans interactions.

$\Sigma_{11}(p)$ = self énergie irréductible ayant une "jambe" entrante et une "jambe" sortante hors du condensé et des "jambes" entrantes et sortantes dans le condensé en nombre égal.

$\Sigma_{20}(p)$ = self énergie irréductible ayant deux "jambes" sortantes hors du condensé et deux "jambes entrantes de plus que de "jambes" sortantes dans le condensé.

D'autre part, le théorème de Hugenholtz et Pines [2.3-2. p 220] nous donne:

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{20}(0) \quad (A-9)$$

Les excitations élémentaires du système seront données par la condition:

$$D(p) = 0 \quad (A-10)$$

Afin de pouvoir estimer explicitement le spectre des excitations de notre assemblée de bosons, nous choisissons un modèle caractérisé par le potentiel

$$u(\vec{p}) = \begin{cases} u_0 & \text{si } |\vec{p}| < \alpha = 1/a \\ 0 & \text{si } |\vec{p}| > \alpha = 1/a \end{cases} \quad (A-11)$$

où a est la distance interparticulaire moyenne. Notre modèle est donc caractérisé par les paramètres U_0 , a , m , n_0 . Il est alors possible de construire deux paramètres sans dimensions:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{m U_0}{a} = \text{paramètre d'interaction.} \\ \beta &= (n_0 a^3)^{1/2} = \text{paramètre de dilution.} \end{aligned} \quad (A-12)$$

Nous faisons l'hypothèse: $\beta \ll 1$ ξ quelconque. (A-13)

Nous considérons donc un gaz dilué mais sans faire d'hypothèse sur la grandeur de l'interaction.

Le problème est alors de déterminer les diagrammes de self énergie à considérer dans $D(p)$ pour être consistant avec les hypothèses ci-dessus. L'inspection des divers diagrammes possibles donne:

Au premier ordre:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^{(1)}(p) &= \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} = n_0 \{ u(0) + u(\vec{p}) \} \\ \Sigma_{20}^{(1)}(p) &= \text{diagramme 3} = n_0 u(\vec{p}) \end{aligned}$$

Au deuxième ordre:

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p) = \text{diagram} = \Sigma_{20}^{(1)}(p) \xi$$

$$\Sigma_{11}^{(2)}(p) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = \Sigma_{11}^{(1)}(p) \xi$$

Au troisième ordre:

$$\Sigma_{20}^{(3a)}(p) = \text{diagram} = \Sigma_{20}^{(3b)} \xi^{-1/2} \beta$$

$$\Sigma_{20}^{(3b)}(p) = \text{diagram} = \Sigma_{20}^{(1)}(p) \xi^2$$

De manière plus générale, les expressions analytiques de ces diagrammes nous permettent d'énoncer les règles suivantes:

- i) Dans tout diagramme de self énergie $\Sigma_{ik}(p)$, toute boucle ne coupant pas une ligne d'interaction et contenant plus de deux lignes de propagateurs donne lieu à un facteur β^m , $m > 1$.
- ii) La présence de $2n$ lignes du condensé dans un diagramme donnera lieu à un facteur β^{n-1} .

Donc, à l'ordre zéro en β , on tiendra compte de l'interaction à tous les ordres en sommant les diagrammes en échelle ayant deux lignes du condensé.

Dans ce but, introduisons l'interaction effective $\Gamma(k, k', p)$ définie par l'équation intégrale :

$$\Gamma(k, k', p) = U(\vec{k} - \vec{k}') + \frac{i}{(2\pi)^4} \int U(\vec{k} - \vec{q}) G^0\left(\frac{p}{2} + q\right) G^0\left(\frac{p}{2} - q\right) \Gamma(q, k', p) d^4q \quad (A-14)$$

Pour l'interaction (A-11), cette équation intégrale peut être résolue exactement et l'on obtient:

$$\Gamma(p) = \frac{U_0}{1 - \frac{mU_0}{2\pi^2} I(p)} \quad (A-15)$$

avec:

$$I(p) = I(\vec{p}, \omega) = \int_0^\alpha \frac{q^2 dq}{2m\left(\mu + \frac{\omega}{2}\right) - q^2\left(1 + \frac{p^2}{4q^2}\right) + i\delta} \quad (A-16)$$

Nous pouvons alors écrire pour les self énergies:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(p) &= 2n_0 \Gamma(p) + O(\beta) \\ \Sigma_{20}(p) &= n_0 \Gamma(0) + O(\beta) \end{aligned} \quad (A-17)$$

D'où, en remplaçant dans (A-10), un spectre pour les grandes longueurs d'onde $|\vec{p}| \rightarrow 0$ de la forme:

$$\omega(\vec{p}) = \bar{c} |\vec{p}| (1 - \gamma \vec{p}^2 + \dots) \quad (A-18)$$

$$\text{avec: } \bar{c} = c_B \frac{\left\{1 + \frac{mn_0 \Gamma(0)}{\alpha^2}\right\}^{1/2}}{1 - 2 \frac{mn_0 \Gamma(0)}{\alpha^2}} \quad (A-19)$$

$$c_B = \left(\frac{n_0 \Gamma(0)}{m}\right)^{1/2} = \text{vitesse de Bogolioubov.}$$

$$\bar{\gamma} = \left\{ 1 + \frac{m n_0 \Gamma(0)}{\lambda^2} \right\} \gamma_B \quad (A-20)$$

$$\gamma_B = - \frac{1}{8 c_B^2 m^2}$$

La comparaison de (A-14) avec l'équation de Lipmann-Schwinger pour l'amplitude de diffusion $f(k, k')$ permet encore d'écrire:

$$\Gamma(0) \simeq \frac{4\pi}{m} f(0,0) = \frac{4\pi}{m} f_0 \quad (A-21)$$

D'autre part une bonne approximation pour f_0 consiste à poser $f_0 \sim a$.

D'où:

$$\begin{aligned} \bar{c} &\simeq (1 + 15,1 \beta^2) c_B \\ \bar{\gamma} &\simeq (1 + 12,6 \beta^2) \gamma_B \end{aligned} \quad (A-22)$$

En calculant γ_B en prenant pour valeur de c_B la vitesse du son mesurée expérimentalement, on obtient:

$$\bar{\gamma} \simeq - (1 + 12,6 \beta^2) 5 \cdot 10^{36} \text{ cgs} \quad (A-23)$$

Nous voyons donc que le résultat de Bogolioubov pour la dispersion est exact à l'ordre β^2 près. Il faut pourtant remarquer que pour l'hélium liquide $\beta \sim 0,3$ ce qui hypothèque fortement la validité de ce calcul dans le cas de l'hélium liquide.

REMERCIEMENTS.

Ma reconnaissance va en premier lieu à mon directeur de thèse, le Professeur C.P. Enz qui m'a introduit dans ce domaine de recherche, m'a dirigé et encouragé tout au long de ce travail.

Je tiens ensuite à remercier le Docteur J. Jäckle pour ses précieuses suggestions et sa grande disponibilité. Je ne saurais enfin oublier les membres du Département de Physique Théorique de l'Université de Genève et particulièrement le Docteur J.J. Forney et Mr. D. Baeriswyl pour leur constante collaboration.

REFERENCES.

- 1-1 F.LONDON. Superfluids II. Dover 1954.
- 1-2 K.R. ATKINS. Liquid helium. Cambridge. Univ. Press 1959.
- 1-3 J. WILKS. Properties of liquid and solid helium. Oxford Univ.Press 1967.
- 1-4 H. FRÖHLICH. Physica 4 , 639,(1937).
- 1-5 L. TISZA. Nature 141,913,(1938).
- 1-6 L. TISZA. J.phys at radium, 1,164,(1940).
- 1-7 L. TISZA Phy . Rev 72,838,(1948).
- 1-8 P.KAPITZA. J.Phys. USSR 4,181,(1941).
- 1-9 L.D.LANDAU. Coll. papers, Pergamon, 301, (1965).
- 1-10 L.D.LANDAU. " " " , 466, (1965).
- 1-11 R.KRONING, A. THELLUNG, Physica 18,749,(1952).
- 1-12 A. THELLUNG. Physica 19,217,(1953).
- 1-13 J.M. ZIMAN. Proc.Roy.Soc. 219A,257,(1953).
- 1-14 C.P. ENZ. Méthodes des problèmes à N corps I. CICP (1968).
- 1-15 R.P.FEYNMAN. Phys.Rev.91,1301,(1953).
- 1-16 R.P. FEYNMAN.Phys.Rev.94,262,(1959).
- 1-17 R.P. FEYNMAN. Prog.low temp. phys. 1,17,(1965).
- 1-18 R.P. FEYNMAN, M. COHEN. Phys.Rev.102,1189,(1956).
- 1-19 H.E. HALL, W.F. VINEN. Proc.Roy.Soc. 238A,204,(1956).
- 1-20 N. BOGOLIOUBOV. J.Phys. USSR 11,23,(1947).
- 1-21 J. GAVORET, P. NOZIERES. Ann.Phys.28,349,(1964).
- 1-22 K. HUANG, A. KLEIN, Ann. Phys. 30,203,(1964).
- 1-23 N. BOGOLIOUBOV. On the hydrodynamics of superfluids.(Gordon Breach 1963)

- 1-24 P.C. HOHENBERG, P.C. MARTIN. Ann.Phys. 34,291,(1965).
- 1-25 Z. GALASIEWICZ. Superconductivity and quantum fluids.Pergamon 1970.
- 1-26 C.P. ENZ. Phénoménologie des systèmes à N corps (1971).
- 1-27 S.W. JORDANSKY. Ann. Phys. 29,335,(1964).
- 1-28 R.A. COWLEY, A.D.B. WOODS. Can.Jour.Phys. 49,177,(1971).
- 1-29 C.P. ENZ. Phys.Rev.A,sept 1972.
- 1-30 O. PENROSE, L. ONSAGER. Phys.Rev.104, 576,(1956).
- 1-31 C.P. HOHENBERG, P.M.PLATZMAN. Phys.Rev 152,198,(1966).
- 1-33 V.F. SEARS. Phys.Rev. 185,200,(1969).
- 1-33 V.F. SEARS. Phys.Rev. 1A,1969, (1970).
- 1-34 O.K. HARLING. Phys.Rev. 3A,1073,(1971).
- 1-35 F.W. CUMMINGS,C.J. HYLAND, G. ROWLAND. à paraître .
- 1-36 W.F. VINEN. Reports on Prog. in Phys. 31, (1968).
- 1-37 Z.GALASIEWICZ. Bull. académie Polonaise des sciences.Vol XVI 9,(1968).
- 1-38 H.HAUG, K.WEISS. Phys. Lett. 33A,263,(1970).
- 1-39 H.HAUG, K.WEISS. Phys.Rev 3A,717,(1971).
- 1-40 H.HAUG, J.WEISS. à paraître.
- 1-41 P. NOZIERES. Quantum fluids. Ed. Brewer. North-Holland 1966.
- 1-42 J.P. STRALEY. Phys.Rev 5A,338,(1972).
- 2,1-1 D.BOHM, D. PINES. Phys.Rev. 82,625.(1951).
- 2,1-2 " " " " 85,338,(1952).
- 2,1.3 " " " " 92,609,(1953).
- 2,1-4 ", " " " 92,626,(1953).
- 2,1-5 D. BOHM. "Les Houches 1959" ed. Dunod.
- 2,1-6 D.N. ZUBAREV,N.N.BOGOLIUBOV, JETP 1, 83,(1955).
- 2,1-7 K. HOROIKE. Prog. Theor.Phys. 21,327,(1959).

- 2,1-8 J.K. PERCUS, G.J. YEVICK, Phys. Rev 110,1,(1958).
- 2,1-9 " " " " 101,1186,(1956).
- 2,1-10 D. BOHM, S.SALT, Rev.Mod.Phys. 39, 894,(1967).
- 2,1-11 M. EGER,E.P. GROSS, Ann.Phys. 24,63,(1963).
- 2,1-12 L.P. PITAEVSKII. JETP 9, 830,(1959).
- 2,1-13 J. RUVALDS, A. ZAWADOWSKI,J. SOLANA. Phys.Rev. 5A,339, (1972).
- 2,1-14 T. NISHIYAMA. Prog.Theor.Phys. 12,265,(1954).
- 2,1-15 " " " " 14, 37,(1955).
- 2,1-16 " " " " 17,711,(1955).
- 2,1-17 " " " " 38,1062,(1967).
- 2,1-18 " " " " 42,1504,(1969).
- 2,1-19 " " " " 45,730,(1971).
- 2,2-1 S.SUNAKAWA, Y. YOKO-O, H. NAKATANI. Prog.Theor.Phys.27,589,(1962)
et 28,127,(1962).
- 2,2-2 S. SUNAKAWA, S. YAMASAKI, T. KEBUKAWA. Prog.Theor Phys41,919,(1969).
- 2,2-3 " " " " " " 44,565,(1970).
- 2,2-4 W. BIERTER, H.L. MORISSON, Lett. nuovo. cim. 1, 701, (1969).
- 2,2-5 R.FANELLI, R.E.ZTRUZYNSKI. Phys.Rev 173, 248,(1968).
- 2,2-6 J.C.GARRISON, H.L. MORISON,J. WONG, Jour.Math.Phys 11,630,(1970).
- 2,2-7 J.C. GARRISON,J. WONG, Jour. Math. Phys. 11, 2242,(1970).
- 2,2-8 H. FRÖHLICH. Physica 34,47,(1967).
- 2,2-9 " " 37,215,(1967).
- 2,2-10 L.A. TURSKI. Physica 57,432,(1972).
- 2,2-11 B.B VARGA, S.G. ECKSTEIN, Jour. low.temp. phys. 4,563,(1971).
- 2,2.12 " " , Phys Lett. 29A, **327** , (1969).
- 2,2-13 F. LONDON, Superfluids II.Ed. Dover 1954 § 15.

- 2,2-14 R.P. ZILSEL. LT VII, Toronto 1960, 544.
- 2,2-15 F. LONDON. Rev Mod. Phys. 17,310,(1943).
- 2,3-1 P. NOZIERES. "Le problème à N corps". Dunod 1963. Ch.3.
- 2,3-2 A.A. ABRIKOSOV, L.P. GORKOV, I.Y. DZIALOSHINSKII. "Quantum field theoretical methods in statistical physics. Pergamon 1965. §23.
- 2,3-3 K.KEHR. Physica 33, 620,(1967).
- 2,3-4 Voir 2,3-3 p. 356.
- 2,3-5 D.J. AMIT, J.W.KANE,H.WAGNER.Phys. Rev.Lett. 19, 425,(1967).
- 2,3-6 R. KLEIN, R.K. WEHNER. Helv.phys. acta. 43,757,(1970).
- 2,3-7 H. GOULD, V.K. WONG. Phys Rev. Lett. 27,301,(1971).
- 2,3-8 W. GÖTZE . Phys.Rev. 156,951, (1967).
- 2,3-9 C.P. ENZ. Méthodes des problèmes à N corps II. CICP 1968/69.
- 2,3-10 C.P. ENZ. Phénoménologie des systèmes à N corps.§2.3 1970.
- 2,3-11 Z. GALASIEWICZ. c.f.1-25. form V . 81 p.152.
- 2,3-12 C.P. ENZ. Méthodes des problèmes à N corps III. (1969).
- 2,3-13 L.P. KADANOFF, G. BAYM. Quantum statistical mechanics. Benjamin 1962.
- 2,3-14 C.P. ENZ. Méthodes des problèmes à N corps. (1971).
- 2,3-15 R. SOMMERFELD. Thermodynamique et mécanique statistique. p. 89.
- 2,3-16 L.LANDAU, E. LIFCHITZ. Mécanique des fluides. Moscou 1970.
- 3,1-1 C.E. CHASE: M.A. HERLIN. Phys.Rev 97,1447,(1955).
- 3,1-2 B.M. ABRAHAM, Y. ECKSTEIN, J.B. KETTERSON,J.M. VIGNOS. Phys.Rev. Lett. 17, 1245, (1966).
- 3,1-2 W.M. WHITNEY, C.E. CHASE. Phys.Rev, 158,200, (1967).
- 3,1-4 B.M. ABRAHAM, Y. ECKSTEIN, J.B. KETTERSON, M. KUCHNIR, Phys.Rev. 19 , 690, (1967).
- 3.1-5 P.R. ROACH, J.B. KETTERSON, M. KUCHNIR, Phys. Rev Lett. 25,1002,(1970)

- 3,1-6 B.M. ABRAHAM, Y.ECKSTEIN, J.B. KETTERSON, M. KUCHNIR. Phys.Rev. 1A,250,(1970).
- 3,1-7 S. MA, H. GOULD, V.K. WONG. Phys.Rev 3A, 1453, (1971).
- 3,1-8 C.E. CALOLL. Phys. Rev 2A,497, (1970).
- 3,1-9 J. JAECKLE. Z.Phys. 231,362, (1970).
- 3,1-10 C.P. ENZ. Lett. nuovo cimento 2 , 323, (1969).
- 3,1-11 C.J. PETHICK, D. TER HAAR, Physica 32, 1905, (1966).
- 3,1-12 C,P. ENZ. Jour. low temp.phys. 3 ,1, (1970).
- 3,3-1 L.D. LANDAU. Nucl.Phys. 13,181, (1959).
- 3,3-2 L.S. LANGER. Phys. Rev. 124,997, (1961).
- 3,3-4 J.M. LUTTINGER. Phys. Rev. 121,942,(1961).
- 3,3-5 J. GOLDSTONE. Proc.Roy.Soc. 239A,267, (1957).
- 3,3-6 J. HUBBARD. Proc. Roy. Soc. 239A, 539, (1957).
- 3,3-7 N.M. HUGENHOLTZ, Physica 23, 481, (1957).
- 3,3-8 L.S. LANGER. Phys.Rev. 127,5,(1962).
- 3,3-9 I.E. DZYALOSHINSKII. JETP 15, 778, (1962).
- 3,3-10 G.M. ELIASHBERG. JETP 15, 1151, (1962).
- 3,3-11 R. MILLS. Propagators for many particle systems . Gordon-Breach.
(1969).
- 3,3-12 R. BALIAN, C de DOMINICIS. Nucl.Phys. 16, 502, (1960).
- 3,3-13 G. BAYM, A.M. SESSLER, Phys. Rev. 131, 2346, (1963).
- 3,3-14 W. BRENIG, W. GOETZE, H. WAGNER, non publié.
- 3,5-1 N.M. HUGENHOLTZ, D PINES. Phys.Rev.116,489, (1959),
- 3,5-2 G, BAYM, C.P. ENZ. IBM-Report 1971 (non publié)
- 3,5-3 J. JAECKLE. Thèse. (non publié)
- 3,5-4 L.D. LANDAU, I.M. KHALATNIKOV. JETP 19, 637, (1949).

- 3,5-5 J. JAECKLE. Z.Phys. 231,362. (1970).
- 3,5-6 J. JAECKLE, K. KEHR. Phys. Lett. 37A,205, (1972).
- 3,6-1 L. LANDAU. Collected papier . Pergamon . p 494.
- 3,6-2 S. ECKSTEIN, B.B. VARGA. Phys.Rev.Lett 21,1311,(1968).
- 3,6-3 K.KAWASAKI, Prog. Theor.Phys. 26, 763,(1961).
- 3,6-4 S. SIMONS. Proc. Phys. Soc 82, 401, (1963).
- 3,6-5 A.J. LEGGETT, D. TER HAAR.Phys.Rev 139, A779, (1965).
- 3,6-6 A.D.B. WOODS, R.A. COWLEY. Phys Rev Lett. 24,646, (1970).
- 3,6-7 H.J. MARRIS, W.E. MASSEY. Phys.Rev. Lett. 25,220,(1970).
- 3,6-8 R. KLEIN, K. WEHNER, Physica 53,630,(1971).
- 3:6-9 N.E. PHILLIPS, C.G. WATERFIELD, J.K. HOFER, Phys.Rev.Lett.25,1260,
(1970).
- 3,6-10 J. JAECKLE, K.W. KEHR. Phys.Rev.Lett. 27,654, (1971).
- 3,6-11 R. HALLOCK. Phys.Rev 5A,320, (1972).
- 3,6-12 H.J. MARRIS. Phys. Rev.Lett. 28,277,(1972).
- 3,6-13 A. MOLINARI, T. REGGE. Phys.Rev. Lett. 26,1531, (1971),
- 3,6-14 K. YAMADA,K.ISHIKAWA. Prog. Theor.Phys. 47,1455,(1972).
- 3,6-15 M, DROZ. Helv.Phys. Acta. 45, 34, (1972).
- 4-1 B.M. ABRAHAM, Y, ECKSTEIN, J.B. KETTERSON, M. KUCHNIR, J. VIGNOS.
Phys. Rev. 181,347,(1969).
- 4-2 A.D.B. WOODS. Phys.Rev.Lett. 14,355, (1965).
- 4-3 R. ROACH, J.B. KETTERSON, B.M. ABRAHAM, K. KUCHNIR. à paraître.
- 4-4 R. KLEIN, K. WEHNER. Phys.Rev.Lett. 23,1372, (1969).
- 4-5 P.F. MEIER, H. BECK . Phys. Lett. 36A, 397, (1971).
- 4-6 J.C. WARD. Phys. Rev. 78,182, (1950).
- 4-7 P. NOZIERES, J.M. LUTTINGER. Phys Rev 127, 1423, (1962).

- 4-8 F. de PASQUALE, G. JONA-LASINIO, E. TABET. Ann.Phys. 33, 381, (1965).
- 4-9 W. GOETZE, H. WAGNER, Physica 31, 475, (1965).
- 4-10 C.P. ENZ. "Many body problems, Mallorca International School of physics 1969. Plenum Press 1969 . pl.
- 4-11 I.M. KHALATNIKOV. " Introduction to the theory of superfluidity" Benjamin 1965.
- 5-1 B.D. JOSEPHSON. Ann.Phys. 70, 229, (1972).

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE II: INTRODUCTION.

1.1	Les diverses approches théoriques de l'hélium II.	5
1.2	Condensé et superfluidité.	22
1.3	Plan du travail.	31

CHAPITRE II: DESCRIPTION MICROSCOPIQUE DE L'HELIUM SUPERFLUIDE EN TERMES
DE VARIABLES COLLECTIVES.

2.1	Description d'un système à N corps en termes de variables collectives. Application à l'hélium superfluide.	35
2.2	Le modèle de Sunakawa.	49
2.2.1.	Définition des variables collectives.	49
2.2.2.	Validité d'une description en termes de variables collectives.	54
2.2.3.	Expression de l'hamiltonien en termes de variables collectives.	58
2.3	Spectre des excitations à grande longueur d'onde.	66
2.3.1	Fonction de corrélation densité-densité.	66
2.3.2.	La méthode fonctionnelle.	76
2.3.3.	Grandeurs thermodynamiques.	80

CHAPITRE III: ATTENUATION ULTRASONORE A BASSE TEMPERATURE.

3.1	Introduction.	85
3.2	Coefficient d'atténuation ultrasonore.	88
3.3	Propriétés analytiques et partie imaginaire de la self énergie.	91
3.4	Calcul du trivertex.	100
3.5	Calcul de l'atténuation ultrasonore.	105
3.6	Dispersion du spectre à grandes longueur d'onde.	115

CHAPITRE IV: CALCUL DE LA VITESSE DU SON ET DES PROPRIETES THERMODYNAMIQUES
A L'AIDE DES IDENTITES DE WARD.

4.1	Introduction.	125
4.2	Identités de Ward.	128
4.2.1	Identités de Ward dynamiques.	130
4.2.2	Identités de Ward thermodynamiques.	137
4.3	Calcul de la chaleur spécifique et de la vitesse du son.	145

CHAPITRE V : CONCLUSIONS. 159

APPENDICE: Calcul de la dispersion pour un gaz de Bose dilué. 163

